Université de Picardie Jules Verne
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
33, rue Saint Leu
80039 Amiens Cedex 1

Habilitation à diriger des recherches

Spécialité : **Mathématiques**

Document de Synthèse

Récurrence de Poincaré dans les systèmes dynamiques hyperboliques

présentée par
Benoît Saussol

Soutenue le 16 Décembre 2003 à l'Université de Picardie Jules Verne, devant le jury composé de

Jean-Pierre Conze .... Professeur, Université de Rennes I
Olivier Goubet .... Professeur, Université de Picardie Jules Verne
Gerhard Keller .... Professeur, Université d'Erlangen, Allemagne
Yves Lacroix .... Professeur, Université de Picardie Jules Verne
Jörg Schmeling .... Professeur, Université de Lund, Suède
Jean-Paul Thouvenot ..... Directeur de recherche, Université de Paris VI

Mes remerciements vont en premier lieu aux rapporteurs, Jean-Pierre Conze, Gerhard Keller, Yves Lacroix et Jörg Schmeling. Je tiens à leur témoigner ma reconnaissance pour l'intérêt porté à mon travail.

Je remercie également les autres membres du jury, Olivier Goubet et Jean-Paul Thouvenot, pour l'honneur qu'ils me font d'avoir accepté d'être présent.

Je voudrais exprimer ma profonde reconnaissance envers tous ceux avec qui j'ai co-signé des articles. Grâce à leur amitié, les travaux présentés dans ce mémoire ont toujours été élaboré dans la bonne humeur. Merci donc à José Alves, Valentin Afraimovich, Vitor Araújo, Luís Barreira, Henk Bruin, Jean-René Chazottes, Ai-Hua Fan, Masaki Hirata, Carlangelo Liverani, Vincent Penné, Jörg Schmeling, Serge Troubetzkoy, Sandro Vaienti et Jun Wu.

à Laurence et Maria

Avant-propos

La sensibilité aux conditions initiales, i.e. la séparation exponentiellement rapide d'orbites voisines, est à l'origine de l'impréditibilité à long terme des systèmes dynamiques chaotiques. Une formalisation mathématique de cette séparation exponentielle est la *dynamique hyperbolique*, l'objet principal de mes recherches. D'un point de vue statistique, ce comportement favorise la perte de mémoire, si bien que ces systèmes ont tendance à être bien approchés par des modèles probabilistes décorrélés.

Ce mémoire présente uniquement mes travaux relatifs à la *récurrence de Poincaré*, soit les articles [**3, 5, 9, 10, 12, 13, 14, 16, 17, 21, 23**]. Par souci d'homogénéité, je n'ai pas inclus dans ce document les articles relatifs aux deux autres thèmes auxquels j'ai contribué : la décroissance des corrélations [**1, 2, 6**] et l'analyse multifractale [**7, 8, 11, 18, 19, 20, 22**].

Afin de différencier mes contributions des autres sources, j'ai opté pour deux listes de références, mes articles ayant une référence numérique.

Table des matières

Introduction

1. Récurrence de Poincaré

Afin d'éviter toute ambiguïté, on commence par donner quelques définitions de notions classiques des systèmes dynamiques.

Si X est un ensemble et $f\colon X \to X$ une application, on appellera le couple (X, f) un *système dynamique*. Si $\mathcal{B}$ est une tribu sur X et μ une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}$, on appellera $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un *espace de probabilité*. Si f est $\mathcal{B}$-mesurable et pour tout mesurable $B \in \mathcal{B}$ on a $\mu(f^{-1}B) = \mu(B)$, on dira que la mesure μ est *invariante par f*.

DÉFINITION 1. *On appelle système dynamique mesuré un quadruplet $(X, \mathcal{B}, f, \mu)$ pour lequel (X, f) est un système dynamique et $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace de probabilité tel que μ soit une mesure invariante par f.*

Par la suite on considérera essentiellement des systèmes dynamiques définis sur un espace métrique (X, d). Dans ces cas là, on prendra implicitement pour tribu $\mathcal{B}$ la tribu des boréliens associée. Toute mesure considérée sera alors implicitement borélienne. On notera $B(x, r)$ la boule ouverte de centre $x \in X$ et de rayon $r > 0$.

Tout système dynamique mesuré a une récurrence non triviale.

THÉORÈME 1 (Poincaré). *Soit $(X, \mathcal{B}, f, \mu)$ un système dynamique mesuré. Pour tout mesurable $A \in \mathcal{B}$, pour μ-presque tout point $x \in A$, il existe une infinité d'entiers $n > 0$ tels que $f^n x \in A$.*

On se placera dès maintenant dans le cas où (X, d) est un espace métrique séparable (i.e. il existe une suite dense). Le *support* d'une mesure μ sur (X, d) est alors l'ensemble

$$\operatorname{supp} \mu \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \colon \forall r > 0, \mu(B(x, r)) > 0\}.$$

D'après le théorème de Poincaré, on sait que presque tout point d'une boule $B = B(x, r)$ centrée autour d'un point $x \in \operatorname{supp} \mu$, où μ est une mesure invariante, retournera dans la boule. Cette information qualitative mérite certainement d'être précisée. L'objet de la *récurrence quantitative* est précisément de mesurer la façon dont les retours s'opèrent.

Définition 2. *Soit* $A \subset X$. *On définit pour* $x \in X$

$$\tau_A(x) = \inf\{n \geq 1 \colon f^n x \in A\},$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. *Pour* $x \in A$ *on parlera de* temps de retour *et pour* $x \in X \setminus A$ *de* temps d'entrée *de* x *dans* A.

Dans ce mémoire on se propose de mener l'étude de la récurrence quantitative selon trois axes complémentaires.

– Si l'on considère le temps de retour dans la boule τ_B comme une variable aléatoire sur B, on peut s'intéresser à sa loi. Pour cela, on calcule la fonction de répartition

$$F_B(t) = \frac{1}{\mu(B)}\mu\left(\{y \in B \colon \mu(B)\tau_B(y) > t\}\right)$$

On obtiendra au chapitre 2 des convergences en loi des temps de retour lorsque $r \to 0$.

– Combien de temps faut-il attendre pour que le système revienne dans un état proche de son état initial, avec disons une erreur $r > 0$? La réponse est donnée par $\tau_B(x)$. On obtiendra au chapitre 3 des bornes très générales sur cette quantité, avec des convergences presque-sûres dans certains cas.

– Quel est le temps de retour minimal parmi les points de la boule ? Cette question est assez différente des deux précédentes, au sens ou l'on n'a plus forcément un comportement typique dicté par la mesure invariante. On verra au chapitre 4 que la réponse est aussi très différente.

Tout au long du texte, on montrera que ces questions sont étroitement liées aux notions d'entropie, de dimensions et d'exposants de Lyapunov. Celles-ci seront introduites aux chapitres 1 et 3. Ces quantités restent difficilement abordable de manière numérique. Aussi il serait intéressant de pouvoir y accéder au moyen des temps de retour.

2. Premiers résultats classiques concernant la récurrence

Définition 3. *On dira qu'un système dynamique mesuré* $(X, \mathcal{B}, f, \mu)$ *est* ergodique *si pour tout mesurable* $B \in B$ *on a*

$$f^{-1}B \stackrel{\mu}{=} B \Rightarrow \mu(B) = 0 \text{ ou } \mu(B) = 1.$$

Théorème 2 (Kac [**Ka47**]). *Soit $(X, \mathcal{B}, f, \mu)$ un système dynamique mesuré ergodique et $A \in \mathcal{B}$ un mesurable de mesure $\mu(A) > 0$. Alors*

$$\int_A \tau_A d\mu = 1.$$

Pour μ non ergodique, l'inégalité

$$\int_A \tau_A d\mu \leq 1,$$

reste valable.

Autrement dit, dans un système ergodique, l'espérance du temps de retour est égale à l'inverse de la mesure de A.

Théorème 3 (Théorème ergodique [**Bi31**]). *Soit $(X, \mathcal{B}, f, \mu)$ un système dynamique mesuré. Pour toute fonction $\varphi \in L^1(\mu)$, il existe $\bar{\varphi} \in L^1(\mu)$ f-invariante telle que $\int \bar{\varphi} d\mu = \int \varphi d\mu$ et*

$$\frac{\varphi(x) + \cdots + \varphi(f^{n-1}x)}{n} \to \bar{\varphi}(x) \quad \textit{pour } \mu\textit{-presque tout } x.$$

La convergence a aussi lieu dans $L^1(\mu)$ et si, en outre, μ est ergodique alors $\bar{\varphi} = \int \varphi d\mu$.

Le théorème ergodique donne des informations sur la récurrence. En effet, si l'on prend dans un système ergodique comme fonction $\varphi = I_A$, l'indicatrice d'un mesurable A de mesure positive, alors il vient

$$\frac{\operatorname{card}\{k \in \{0, \ldots, n-1\} \colon f^k x \in A\}}{n} \to \mu(A) \quad \text{pour } \mu\text{-presque tout } x.$$

Soit A un mesurable de mesure non nulle. Par Poincaré, l'ensemble $\hat{A}$ des points récurrents de A est de mesure égale à $\mu(A)$. Sur $\hat{A}$, on définit l'application de premier retour par

$$\begin{aligned} f_A \colon \hat{A} &\to \hat{A} \\ x &\mapsto f^{\tau_A(x)}(x) \end{aligned}$$

On peut montrer que la mesure de probabilité $\mu_A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\mu(A)} \mu|_A$ est invariante par f_A. On appelle le nouveau système le *système induit* sur A. On peut noter que l'ergodicité de la mesure est préservée par induction.

On définit les *temps de retours successifs* par

$$\tau_A^{(1)}(x) = \tau_A(x), \quad \tau_A^{(k+1)}(x) = \tau_A^{(k)}(x) + \tau_A(f^{\tau_A^{(k)}(x)} x).$$

Observons que

$$\tau_A^{(k)}(x) = \tau_A(x) + \tau_A(f_A x) + \cdots + \tau_A(f_A^{(k-1)} x).$$

En supposant μ ergodique, le théorème de Birkhoff appliqué à la fonction τ_A et au système dynamique $(\hat{A}, f_A, \mu_A)$ donne l'asymptotique

$$\frac{1}{k}\tau_A^{(k)}(x) \to \frac{1}{\mu(A)} \quad \text{pour } \mu\text{-presque tout } x.$$

En toute généralité, on ne peut pas aller beaucoup plus loin dans l'étude de la récurrence. Pour obtenir des réponses précises aux questions posées en introduction, il sera nécessaire de traiter des classes de systèmes plus restreints.

CHAPITRE 1

Systèmes hyperboliques et formalisme thermodynamique

Dans ce chapitre, on va introduire le formalisme thermodynamique et présenter quelques classes de systèmes hyperboliques dont on étudiera la récurrence aux chapitres suivants. La référence incontournable de ce chapitre est sans conteste l'ouvrage de A. Katok et B. Hasselblatt [**KaHa95**]. Le livre de W. Parry [**Pa81**] reste aussi une introduction intéressante à la théorie ergodique. On trouvera dans le livre de D. Ruelle [**Ru79**] une introduction au formalisme thermodynamique. L'approche plus pédagogique du livre de G. Keller [**Ke98**] est aussi appréciable.

1. L'entropie

On rappelle brièvement une définition de l'entropie métrique, quantité qui sera utilisée fréquemment tout au long du texte.

Définition 4. *Soit $(X, \mathcal{B}, f, \mu)$ un système dynamique mesuré. L'entropie d'une partition mesurable de X finie ou dénombrable ξ est définie par*

$$H(\xi) = -\sum_{C \in \xi} \mu(C) \log \mu(C).$$

On définit alors l'entropie de f restreinte à ξ par

$$h_\mu(f|\xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\xi \vee f^{-1}\xi \vee \cdots \vee f^{-n+1}\xi).$$

On définit alors l'entropie métrique du système par

$$h_\mu(f) = \sup_{H(\xi)<\infty} h_\mu(f|\xi),$$

où le supremum est pris sur toutes les partitions mesurables finies ou dénombrables de X d'entropie finie.

On peut remarquer que plusieurs définitions équivalentes de l'entropie existent. Il suffit, par exemple, de prendre le supremum sur les partitions finies. Par ailleurs, rappelons qu'une partition génératrice, c'est-à-dire telle que

$$\sigma(\cup_n \xi \vee f^n\xi \vee \cdots \vee f\xi \vee \xi \vee f^{-1}\xi \vee \cdots \vee f^{-n+1}\xi) \overset{\mu}{=} \mathcal{B},$$

réalise le supremum.

Pour les systèmes dynamiques topologiques, on a le principe variationnel reliant l'entropie topologique à l'entropie des mesures invariantes.

THÉORÈME 4 (voir [**KaHa95**]). *Soit $f\colon X \to X$ une application continue sur un compact X. On a le principe variationnel*

$$\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(f) = \sup\{h_\mu(f)\colon \mu \ f \ \textit{invariante}\}.$$

2. Les exposants de Lyapunov et les mesures hyperboliques

Dans cette section, on présentera brièvement les propriétés géométriques de base des difféomorphismes sur des variétés.

Soient X une n-variété Riemanienne et $f\colon X \to X$ un difféomorphisme de classe $C^{1+\eta}$ [1].

Soit μ une mesure invariante par f, ergodique. Le théorème ergodique multiplicatif d'Oseledets ([**Os68**], voir aussi Ruelle [**Ru79**] pour une preuve par le théorème ergodique sous-additif) assure l'existence des *exposants de Lyapunov* presque partout. Plus précisément, il existe un ensemble invariant $Y \subset X$, de mesure $\mu(Y) = 1$ et des nombres $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_r$ tels que,

(i) pour tout $x \in Y$, il existe une décomposition de l'espace tangent T_xX en sous-espaces $(E^i_x)_{i=1,\ldots,r}$

$$T_xX = \bigoplus_{i=1}^{r} E^i_x$$

et les applications $x \mapsto E^i_x$ sont mesurables ;

(ii) les sous-espaces E^i sont invariants

$$d_xfE^i(x) = E^i_{fx};$$

(iii) le comportement exponentiel est dicté par les exposants de Lyapunov

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |d_xf^nv| = \lambda_i \quad \text{pour tout vecteur } v \in E^i_x \setminus E^{i-1}_x$$

(où l'on aura posé $E^0_x = \{0\}$).

On dira qu'une mesure μ est *partiellement hyperbolique* si il existe au moins un exposant strictement positif et au moins un exposant strictement négatif. Soit d'après le classement choisi $\lambda_1 < 0 < \lambda_r$.

On remarque que si μ est une mesure d'entropie non nulle alors l'*inégalité de Margulis-Ruelle* [**Ru78**]

$$h_\mu(f) \le \sum_i \max(\lambda_i, 0) \dim E^i$$

[1]Bien des résultats seront aussi valables pour des applications avec des ensembles de singularité raisonnables comme considérés dans [**KaStLePr86**].

entraîne l'existence d'au moins un exposant de Lyapunov strictement positif. Le même argument appliqué au difféomorphisme f^{-1} (rappelons que $h_\mu(f^{-1}) = h_\mu(f) > 0$) donne un exposant de Lyapunov strictement négatif. Les mesures d'entropie non nulle sont ainsi partiellement hyperboliques.

On dira qu'une mesure est *hyperbolique* lorsque celle-ci n'a pas d'exposants nuls. Nous verrons aux chapitres suivant des applications concernant les mesures partiellement hyperboliques et hyperboliques.

3. Systèmes dynamiques uniformément hyperboliques

3.1. Difféomorphismes. Soit f un difféomorphisme de classe $C^{1+\eta}$ agissant sur une variété lisse X et un ensemble compact positivement invariant Λ. On dira que le système dynamique (Λ, f) est *uniformément hyperbolique*, ou encore que f est un difféomorphisme de l'axiome A, si les propriétés suivantes sont satisfaites.

(i) (Λ, f) possède une orbite dense ;

(ii) Λ est localement maximal : il existe un ouvert $U \subset X$ tel que $\Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^{-n}U$;

(iii) l'espace tangent $T\Lambda$ se décompose en somme directe de deux sous-espaces E^u et E^s :

$$T\Lambda = E^u \oplus E^s$$

et les applications $x \mapsto E_x^s$ et $x \mapsto E_x^u$ sont continues ;

(iv) les sous-espaces sont invariants par df : pour tout $x \in \Lambda$ on a $d_xfE_x^u = E_{fx}^u$ et $d_xfE_x^s = E_{fx}^s$;

(v) les sous-espaces E^s et E^u sont respectivement contractés par la dynamique et la dynamique inverse : Il existe $c, r \in (0,1)$ tels que pour tout $x \in \Lambda$

$$|d_xf^nv| \leq cr^n|v| \text{ pour tous } v \in E_x^s \text{ et } n > 0,$$
$$|d_xf^{-n}v| \leq cr^n|v| \text{ pour tous } v \in E_x^u \text{ et } n > 0.$$

Comme exemple célèbre de tels systèmes, on peut citer le fer à cheval de Smale, ainsi que l'application du chat d'Arnold, donnée par l'automorphisme algébrique du tore $\mathbb{T}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On note aussi que ces systèmes constituent un ensemble ouvert pour les topologies $C^{1+\eta}$. On peut enfin remarquer que toute mesure invariante pour un système uniformément hyperbolique (Λ, f) sera clairement hyperbolique.

Soient $W^s(x)$ et $W^u(x)$ les variétés stables et instables définies respectivement par

$$W^s(x) = \{y \in \Lambda\colon \lim_{n\to\infty} d(f^n y, f^n x) = 0\},$$
$$W^u(x) = \{y \in \Lambda\colon \lim_{n\to\infty} d(f^{-n} y, f^{-n} x) = 0\}.$$

Soit $W^s_\epsilon(x)$ (resp. $W^u_\epsilon(x)$) la composante connexe de $W^s(x) \cap B(x,\epsilon)$ (resp. $W^u(x) \cap B(x,\epsilon)$. Lorsque (Λ, f) est uniformément hyperbolique, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in \Lambda$, $W^s_\epsilon(x)$ (resp. $W^u_\epsilon(x)$) soit une variété immergée appelée variété stable (resp. instable) locale (de taille ϵ). Ces variétés sont tangentes en tout point de Λ aux directions stables E^s_x (resp. instables E^u_x). De plus, il existe $\delta = \delta(\epsilon)$ tel que, pour $x, y \in \Lambda$ avec $d(x,y) < \delta$, l'intersection $W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(x)$ contienne exactement un point. On peut montrer que l'application

$$[\cdot,\cdot]\colon \{(x,y) \in \Lambda \times \Lambda\colon d(x,y) < \delta\} \to \Lambda$$

définie par

$$[x,y] \stackrel{\text{def}}{=} W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(x)$$

est un homéomorphisme Hölder (local).

Définition 5. *Soit $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_p\}$ une collection finie de compacts $R_i \subset \Lambda$. On dira que $\mathcal{R}$ est une partition de Markov pour (Λ, f) si les propriétés suivantes sont satisfaites.*

(i) $\Lambda = \cup_i R_i$ et $\operatorname{int} R_i \cap \operatorname{int} R_j = \emptyset$ si $i \neq j$;

(ii) pour tout i on a $R_i = \overline{\operatorname{int} R_i}$ et si $x, y \in R_i$ alors $[x,y] \in R_i$;

(iii) Si $x \in \operatorname{int} R_i \cap f^{-1} \operatorname{int} R_j$ alors $f(W^u_\epsilon(x) \cap R_i) \supset W^u_\epsilon(fx) \cap R_j$ et $f^{-1}(W^s_\epsilon(fx) \cap R_j) \supset W^s_\epsilon(x) \cap R_i$.

Les difféomorphismes hyperboliques (Λ, f) possèdent des partitions de Markov de diamètre arbitrairement petit [**Bo75**]. Etant donnée une partition de Markov, on peut définir une *matrice de transition* par

$$A_{ij} = 1 \text{ si } \operatorname{int} R_i \cap f^{-1} \operatorname{int} R_j \neq \emptyset \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

On obtiens ainsi un codage du difféomorphisme par une *chaîne de Markov topologique*, ou *sous-shift de type fini* bilatéral

$$\Sigma_A = \{\omega = (\omega_n)_n \in \{1, \dots, p\}^{\mathbb{Z}}\colon A_{\omega_n \omega_{n+1}} = 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}\}.$$

Pour tout $\omega \in \Sigma_A$, l'intersection $\cap_n f^{-n} R_{\omega_n}$ consiste en un unique point que l'on notera $\pi(\omega)$. L'application π ainsi définie est une semi-conjugaison entre (Λ, f) et (Σ_A, σ) où σ est le décalage à gauche $(\sigma\omega)_n = \omega_{n+1}$. L'application π est injective en dehors de l'ensemble des trajectoires du bord de la partition

$\cup_n f^n \partial\mathcal{R}$, où $\partial\mathcal{R} = \cup_i \partial R_i$. On a alors $\pi^{-1}(x) = \omega$ défini par $f^n x \in \operatorname{int} R_{\omega_n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

3.2. Endomorphismes. Soit f un endomorphisme de classe $C^{1+\eta}$ agissant sur une variété lisse X et un ensemble compact positivement invariant Λ. On dira que le système dynamique (Λ, f) est *uniformément dilatant*, ou encore que f est un répulseur, si les propriétés suivantes sont satisfaites.

(i) (Λ, f) possède une orbite dense ;

(ii) Λ est localement maximal : il existe un ouvert $U \subset X$ tel que $\Lambda = \bigcap_{n=0}^{+\infty} f^{-n} U$;

(v) la dynamique est dilatante : Il existe c et $d > 1$ tels que pour tout $x \in \Lambda$

$$|d_x f^n v| \geq c d^n |v| \text{ pour tous } v \in T_x\Lambda \text{ et } n > 0.$$

On dira que (Λ, f) est un *répulseur conforme* si, en outre, $d_x f$ est multiple d'une isométrie pour tout $x \in \Lambda$.

Comme exemple célèbre de tels systèmes, on peut citer le Cantor triadique, les répulseurs conformes comme $z \mapsto z^2$, etc.

DÉFINITION 6. *Soit $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_p\}$ une collection finie de compacts $R_i \subset \Lambda$. On dira que $\mathcal{R}$ est une partition de Markov pour (Λ, f) si les propriétés suivantes sont satisfaites.*

(i) $\Lambda = \cup_i R_i$ et $\operatorname{int} R_i \cap \operatorname{int} R_j = \emptyset$ si $i \neq j$;

(ii) pour tout i on a $R_i = \overline{\operatorname{int} R_i}$;

(iii) Si $\operatorname{int} R_i \cap f^{-1} \operatorname{int} R_j \neq \emptyset$ alors $f(R_i) \supset R_j$.

Les répulseurs possèdent aussi des partitions de Markov de diamètre arbitrairement petit et peuvent être codés par le sous-shift de type fini unilatéral

$$\Sigma_A^+ = \{\omega = (\omega_n)_n \in \{1, \dots, p\}^{\mathbb{N}} \colon A_{w_n w_{n+1}} = 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}.$$

4. Etats d'équilibre et mesures de Gibbs

Soit (Σ_A, σ) un sous-shift de type fini que l'on supposera topologiquement mélangeant. On notera les cylindres par $[\omega]_m^n = \{\omega' \in \Sigma_A \colon \forall k \in \{m, \dots, n\}, \omega'_k = \omega_k\}$. On munira Σ_A de la distance $d(\omega, \omega') = \mathrm{e}^{-n}$ si $n = \min\{k \geq 0 \colon [\omega]_{-k}^k \neq [\omega']_{-k}^k\}$.

Etant donnée une fonction $\varphi \colon \Sigma_A \to \mathbb{R}$ Hölder continue, il existe une unique mesure invariante par σ et une constante $p \in \mathbb{R}$ telle que pour tout ω

$$\mu_\varphi([\omega]_m^n) \approx \exp\left(\sum_{k=m}^{n} \varphi(\sigma^k \omega) - (n - m + 1)p\right), \tag{1}$$

où $\approx$ signifie que le rapport des deux quantités est compris entre deux constantes positives indépendantes de ω, m et n. On appelle μ_φ la *mesure de Gibbs* associée au potentiel φ.

Les mesures de Gibbs ont la propriété de ψ*-mélange exponentiel*. Il existe $c, \lambda \in (0,1)$ tels que pour tout m, n,

$$|\mu(A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| \leq c\lambda^n \mu(A)\mu(B),$$

pour tous $A \in \mathcal{F}_\infty^m$ et $B \in \mathcal{F}_{m+n}^\infty$, où $\mathcal{F}_m^n$ est la tribu engendrée par les cylindres d'ordre $[\cdot]_m^n$. C'est essentiellement la propriété de mélange la plus forte que l'on peut espérer d'un système dynamique de ce type.

On dira qu'une mesure μ est un *état d'équilibre* du potentiel φ pour un système dynamique (X, f) avec X compact et f continue, si μ réalise le maximum dans le membre de droite définissant[2] la *pression topologique* du potentiel φ sur le *compact invariant* X

$$P_f(\varphi|X) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\nu \text{ invariante}} h_\nu + \int \varphi d\nu.$$

Rappelons que pour les sous-shifts de type fini avec potentiel Hölder, ces deux notions de mesure de Gibbs et d'état d'équilibre sont équivalentes et, dans ce cas, la constante p dans l'équation (1) n'est autre que la pression $P_f(\varphi|X)$.

Grâce aux codages établis à la section précédente, il est possible d'envoyer ces états d'équilibre sur la variété (on peut montrer qu'ils ne chargent pas le bord de la partition de Markov) où agit le difféomorphisme (ou l'endomorphisme) uniformément hyperbolique f sur Λ. La mesure d'entropie maximale, par exemple, est clairement l'état d'équilibre du potentiel nul. Par ailleurs, tous les états d'équilibre sont d'entropie non nulle.

Supposons en outre que $\Lambda = X$, autrement dit que f est un difféomorphisme d'Anosov. Dans ce cas, la mesure physique, ou mesure de Sinaï-Ruelle-Bowen de f est l'état d'équilibre du potentiel

$$\varphi_{SRB}(\omega) = \log|\det d_{\pi\omega} f | E^u_{\pi(\omega)}|.$$

Cette mesure vérifie, entre autres, la propriété que pour Lebesgue presque tout point

$$\frac{1}{n}(\delta_x + \delta_{fx} + \cdots + \delta_{f^{n-1}x}) \text{ converge faiblement vers } \mu.$$

[2]On ne donnera pas la définition générale de la pression topologique. Toutefois, dans le cadre considéré, il n'y a pas d'inconvénient à prendre ce principe variationnel comme définition.

Ceci n'est pas une conséquence immédiate du théorème de Birkhoff puisque la mesure μ n'est en général pas absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

CHAPITRE 2

Loi des temps de retour

Ce chapitre concerne les articles [**5, 9, 14**].

1. Systèmes à temps de retour exponentiellement distribués

L'étude des distributions des temps de retour et des temps d'entrée dans les systèmes dynamiques commence véritablement dans les années 1990, par les travaux de P. Collet, A. Galves, et B. Schmitt à l'occasion de l'étude de phénomènes d'intermittence [**CoGaSc92**]. Ces distributions sont bien approximées par des lois exponentielles ou des lois de Poisson. L'histoire remonte en fait à W. Döblin [**Do40**] qui étudia l'approximation de Poisson pour la transformation de Gauss. Puis c'est d'abord dans le cadre des probabilités que ces études se sont développées. On trouvera dans la revue de Z. Coelho [**Za00**] et la récente revue de M. Abadi et A. Galves [**AbGa02**] un historique complet des résultats et des méthodes ainsi que bon nombre de références clés.

La distribution des temps d'entrée normalisés est définie par

$$F_A^{\mathrm{ent}}(t) = \mu\left(x \in X \colon \tau_A(x) > \frac{t}{\mu(A)}\right),$$

et la distribution des temps de retour normalisés par

$$F_A^{\mathrm{ret}}(t) = \mu_A\left(x \in A \colon \tau_A(x) > \frac{t}{\mu(A)}\right),$$

Dans de nombreux cas, on a convergence en loi, lorsque $\mu(A) \to 0$, des temps d'entrée normalisés vers une loi exponentielle. Pour les temps de retour, on ne peut plus véritablement parler de convergence en loi. En effet, les temps de retour τ_A vivent sur l'espace de probabilité $(A, \mathcal{B}(A), \mu_A)$, qui se réduit lorsque $\mu(A) \to 0$. On devrait plus rigoureusement parler d'*approximation* par une loi exponentielle.

Dans un premier temps, j'étais surtout intéressé par les estimations explicites d'erreur dans l'approximation par les lois exponentielle et de Poisson.

Je me suis demandé quel rapport il pouvait y avoir entre la convergence des temps de retour vers l'exponentielle et les temps d'entrée. Ceci m'a fait découvrir ce premier résultat d'énoncé très simple.

THÉORÈME 5 ([**5**]). *Soit* $(X, \mathcal{B}, f, \mu)$ *un système dynamique mesuré. Soit* A_n *une suite de mesurables de mesure positive telle que* $\mu(A_n) \to 0$. *Les temps de retour sont exponentiellement distribués si et seulement si la différence entre les temps de retour et les temps d'entrée tend vers zéro :*

$$\|F^{\text{ent}}_{A_n}(\cdot|A_n) - \exp\|_\infty \to 0 \quad \textit{si et seulement si} \quad \|F^{\text{ret}}_{A_n}(\cdot) - F^{\text{ent}}_{A_n}(\cdot)\|_\infty \to 0.$$

En fait, ce théorème provient d'un résultat plus précis (avec estimation d'erreur) qui dit que les deux quantités sont équivalentes, à des corrections logarithmiques près.

THÉORÈME 6 ([**5**]). *Soit* $(X, \mathcal{B}, f, \mu)$ *un système dynamique mesuré. Soit* A *un mesurable de mesure positive. Posons* $c(A) = \|F^{\text{ret}}_A(\cdot) - F^{\text{ent}}_A(\cdot)\|_\infty$ *et* $d(A) = 4\mu(A) + c(A)(1 - \log c(A))$. *On a les estimations suivantes*

$$e(A) \stackrel{\text{def}}{=} \|F^{\text{ret}}_A(\cdot) - \exp\|_\infty \leq d(A) \quad \textit{et} \quad \|F^{\text{ent}}_A(\cdot) - \exp\|_\infty \leq d(A)$$

et réciproquement

$$c(A) = \|F^{\text{ret}}_A(\cdot) - F^{\text{ent}}_A(\cdot)\|_\infty \leq 2\mu(A) + e(a)(2 - \log e(A)).$$

Pour prouver une statistique exponentielle des temps de retour, on peut donc estimer la différence entre temps de retour et temps d'entrée. C'est une forme de propriété de mélange. Ceci est explicite dans l'estimation suivante

PROPOSITION 7. *Soit* A *un mesurable. On a l'estimation*

$$\|F^{\text{ret}}_A(\cdot) - F^{\text{ent}}_A(\cdot)\|_\infty \leq \inf_{k \in \mathbb{N}} \{a_k(A) + b_k(A) + k\mu(A)\}$$

où les quantités a_k *et* b_k *sont définies par*

$$a_k(A) = \mu_A(\tau_A \leq k) = \mu_A(\bigcup_{j=1}^{k} f^{-j}A)$$

$$b_k(A) = \sup_{B \in \mathcal{A}_\infty} |\mu_A(f^{-k}B) - \mu(B)|$$

où $\mathcal{A}_\infty = \cup_n \sigma(\bigvee_{j=0}^n \{A, X \setminus A\})$.

Ce résultat nous avait été inspiré par la notion de « self-mixing »introduite par M. Hirata [**Hi95**], dans les systèmes ψ-mélangeants. Son théorème était obtenu par des méthodes de transformée de Laplace, ce qui ne permettait pas de garder une trace des approximations effectuées et donc d'obtenir un calcul d'erreur.

Pour les temps de retour successifs, nous avons aussi obtenu un théorème de convergence général avec calcul d'erreur, par la méthode de P. Collet, A. Galves et B. Schmitt [**CoGaSc92**]. On notera

$$N_A(t) = \max\{k \geq 0 \colon \tau_A^{(k)}(t) \leq \frac{t}{\mu(A)}\}$$

le nombre de visites au temps normalisé t dans l'ensemble A.

THÉORÈME 8 ([**5**]). *Soit $(X, \mathcal{B}, f, \mu)$ un système dynamique mesuré, et A un mesurable de mesure positive. Supposons que la partition $\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{A, X \setminus A\}$ soit α-mélangeante ou uniformément mélangeante. Alors on a*

$$\sup_{t \geq 0} \left| \mu_A(N(t) = k) - \frac{t^k}{k!} \mathrm{e}^{-t} \right| \leq g(t, k, A) + g(t, k+1, A)$$

où $g(t, k, A) = (12t^k/k + k^{k-1})\sqrt{k} f(k, A)$ et

$$f(k, A) = k(3d(A) + \inf_M \{\alpha(M) + 3M\mu(A)\}$$

lorsque la partition $\mathcal{A}$ est α-mélangeante et

$$f(k, A) = k(4d(A) + \inf_{M \colon \gamma(M) < \mu(A)^2} \{\gamma(M)/\mu(A)^2 (2 - \log \frac{\gamma(M)}{\mu(A)^2} + 3M\mu(A)\}$$

lorsque la partition $\mathcal{A}$ est uniformément mélangeante avec vitesse γ.

Dans un cadre purement probabiliste, B. Sevast'yanov[**Se72**] à établi sous certaines conditions une convergence à la loi de Poisson pour des sommes de variables aléatoires faiblement dépendantes. Cette méthode à été utilisée par B. Pitskel [**Pi91**] pour des chaînes de Markov puis N. Haydn [**Ha00**] pour certaines applications rationnelles pour établir directement la convergence à la loi de Poisson des temps de retour.

Dans le cadre des systèmes non-uniformément hyperboliques on obtient encore, comme on va le voir, des convergences à des lois exponentielles et de Poisson, et ce malgré le fait que la vitesse de décroissance des corrélations n'est pas toujours exponentielle.

Soit $f_\alpha \colon [0, 1] \to [0, 1]$ l'application de Pomeau-Manneville définie par

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x(1 + 2^\alpha x^\alpha) & \text{si } x \leq 1/2 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 1/2. \end{cases}$$

Les intervalles $[0, 1/2]$ et $[1/2, 1]$ constituent une partition de Markov pour f_α. Pour $\alpha \in (0, 1)$ il existe une mesure de probabilité invariante μ_α absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. On a $f'_\alpha > 1$ sur $(0, 1]$ mais comme 0 est un point fixe neutre, f_α n'est pas uniformément dilatante. C'est un prototype d'application non-uniformément dilatante.

THÉORÈME 9 ([**5**]). *Pour tout $\alpha \in (0, 1)$ le système $([0, 1], f_\alpha, \mu_\alpha)$ a des temps de retour sur les cylindres exponentiellement distribués, et le nombre de visites suit une loi de Poisson.*

La preuve de ce théorème repose sur les estimations de décroissance de corrélations données dans [**2**] et utilise les théorèmes 6 et 8.

P. Collet [**Co01**] a démontré la statistique exponentielle des temps de retour pour des applications de l'intervalle avec points critiques (applications de type Collet-Eckmann), en utilisant la décroissance des corrélations fournie par les tours de Young [**Yo99**]. Très récemment, H. Bruin et S. Vaienti [**BrVa03**] ont montré que sous des hypothèses beaucoup plus faibles (condition de sommabilité sur l'orbite critique) les applications unimodales avaient des temps de retour exponentiellement distribués, toujours en utilisant les tours de Young.

Conjecture. *Soit $f\colon X \to X$ une transformation d'une variété lisse et $\Lambda \subset X$. Si (Λ, f) est un système dynamique uniformément hyperbolique ou dilatant et μ une mesure de Gibbs d'un potentiel Hölder, alors les temps de retour sur les boules sont exponentiellement distribués et le nombre de visites suit une loi de Poisson.*

La preuve donnée dans [**Hi95**] est valable pour les voisinages cylindriques mais son adaptation aux boules reste à préciser. Le problème provient de la nécessité d'avoir des informations sur les vitesses de mélange des boules. Or les vitesses de mélange sont données pour des cylindres ou des fonctions régulières. Une boule a, bien sûr, un bord on ne peut plus régulier d'un point de vue géométrique mais du point de vue de la mesure, ce n'est pas clair. Pour les mesures *doublantes sur un ouvert X*, il n'y a pas de problèmes, ce qui est le cas, par exemple, pour les états d'équilibre des Anosov. Remarquons que ce problème et de même nature que celui de trouver un espace de Banach de fonctions de type variation ou oscillation bornée pour des mesures autres que Lebesgue qui soit préservé par l'opérateur de Perron-Frobenius d'applications dilatantes par morceaux.

Une application de la loi exponentielle des temps de retour sera donnée au théorème 25 du chapitre suivant.

Nous venons de voir des conditions permettant d'établir une convergence à la loi exponentielle des temps de retour et des temps d'entrée. Celles-ci sont essentiellement, comme la proposition 7 l'indique, la combinaison de deux propriétés : l'absence de retours trop rapides (par exemple autour d'un point périodique la loi limite aura une composante ponctuelle) et un mélange suffisant. Je me suis posé la question du rôle éventuel des retours trop rapides sur la loi exponentielle. Ceux-ci influent en fait sur la vitesse de convergence, dont j'avais donné la définition suite aux travaux de P. Collet et A. Galves.

THÉORÈME 10 ([**9**]). *Soit* (Σ_A, σ) *un sous-shift de type fini, et* $\varphi\colon \Sigma_A \to \mathbb{R}$ *un potentiel Hölder. Alors, pour tout point* ω φ*-régulier*[1]*, on a l'équivalence*

$$\frac{\log e([\omega]_0^n)}{\log \mu([\omega]_0^n)} \sim \frac{\tau([\omega]_0^n)}{n},$$

où $\tau([\omega]_0^n) = \min\{k \geq 0\colon \sigma^k[\omega]_0^n \cap [\omega]_0^n \neq \emptyset\}$.

Les temps de premier retour des ensembles $\tau([\omega]_0^n)$ seront traités en détail au chapitre 4.

2. Vers d'autres statistiques des temps de retour

Nous nous sommes intéressés à une question plus globale concernant la classe des systèmes avec une distribution exponentielle des temps de retour. Nous avons alors démontré que la statistique des temps de retour est préservée par induction sur les ouverts. Soit $g\colon [0,\infty) \to [0,1]$ une fonction décroissante. On dira que les temps de retour sont distribués selon g si pour μ-presque tout x et quel que soit $t \notin \operatorname{disc}(g)$,

$$F^{\text{ret}}_{B(x,r)}(t) \to g(t)$$

lorsque $r \to 0$.

THÉORÈME 11 ([**14**]). *Soit* $(X, \mathcal{B}, f, \mu)$ *un système dynamique mesuré ergodique. Supposons que* $X \subset \mathbb{R}^n$*. Soit* $A \subset X$ *un ouvert (induit) de mesure positive. Si les temps de retour pour* (A, f_A, μ_A) *sont distribués selon* g_A *avec* g_A *continue en* 0 *alors les temps de retour pour* (X, f, μ) *sont distribués selon* g_A *pour* μ*-presque tout point de* A*.*

De plus, si g_A *est continue alors la convergence est uniforme en* t*.*

Ce théorème utilise l'existence de points de densité de Lebesgue. C'est pourquoi nous avons supposé que $X \subset \mathbb{R}^n$. En fait on peut remplacer cette condition par celle moins restrictive que les points de densité existent presque-partout. Ceci permet par exemple de traiter les systèmes symboliques.

Grâce au théorème 11, nous avons pu donner une preuve très simple de la statistique exponentielle des temps de retour pour des applications non uniformément hyperboliques.

THÉORÈME 12 ([**14**]). *Pour tout* $\alpha \in (0,1)$*, le système* $([0,1], f_\alpha, \mu_\alpha)$ *a des temps de retour sur les boules exponentiellement distribués.*

Dans un cadre multimodal, nous avons également obtenu.

[1] ω est φ-régulier si $\frac{1}{n}(\varphi(\omega) + \cdots + \varphi(\sigma^{n-1}\omega))$ converge.

Théorème 13 ([**14**]). *Soit* $f\colon [0,1] \to [0,1]$ *une application de classe* C^2*. Posons* $\mathrm{Crit}(f) = \{x\colon f'(x) = 0\}$*. Supposons que pour un* $t > 0$

(i) il existe une mesure t*-conforme non-atomique* m_t *;*

(ii) f *préserve une mesure* μ *absolument continue par rapport à* m_t *;*

(iii) $m_t(\mathrm{orb}(\mathrm{Crit}(f)) = 0$.

Alors le système $([0,1], f, \mu)$ *a des temps de retour sur les boules exponentiellement distribués.*

Et finalement pour certaines applications quadratiques du plan complexe.

Théorème 14 ([**14**]). *Soit* $f(z) = z^2 + c$ *une application quadratique de* $\mathbb{C}$ *qui ne soit pas indéfiniment renormalisable et telle que l'ensemble de Julia* J *ne contienne pas de points de Cremer. Supposons que, pour un* $t > 1$*, on ait*

(i) J *supporte une mesure* $|f'|^t$*-conforme non-atomique* m_t *;*

(ii) f *préserve une mesure* μ *absolument continue par rapport à* m_t *;*

(iii) $m_t(\mathrm{orb}(\mathrm{Crit}(f)) = 0$.

Alors le système $([0,1], f, \mu)$ *a des temps de retours sur les boules exponentiellement distribués.*

Pour conclure ce chapitre, nous allons maintenant voir les autres loi limites possibles.

En ce qui concerne les mesures σ-finies, X. Bressaud et R. Zweimuller [**BrZw01**] ont trouvé dans un cadre très particulier la convergence vers des lois stables.

Pour ce qui est des mesures de probabilités, la question suivante reste ouverte. Quelles sont les lois g possibles telles que les temps de retour soient distribués selon g ? Précisons que l'on demande ici la convergence pour la suite entière de voisinages, et pour μ-presque tout point.

Si l'on relaxe cette condition en autorisant de considérer des convergences le long de sous-suites, et pour des points particuliers, alors Y. Lacroix a montré que toute loi « possible » peut se retrouver.

Théorème 15 ([**La02**]). *Soit* $(X, \mathcal{B}, f, \mu)$ *un système dynamique mesuré apériodique. Soit* $\mathcal{G}$ *la classe des fonctions* $g\colon [0,\infty) \to [0,1]$*, décroissantes et d'intégrale* $\int_0^\infty g(t)dt \leq 1$*. Alors l'adhérence (en norme uniforme en dehors d'un dénombrable) des* $(F_A^{\mathrm{ret}})_A$ *où* A *parcourt l'ensemble des mesurables de mesure positive est contenue dans* $\mathcal{G}$*. Réciproquement, il existe une suite* A_n *de mesurables telle que l'adhérence de* $(F_{A_n}^{\mathrm{ret}})_n$ *soit égale à* $\mathcal{G}$*.*

Le lemme de Rokhlin est au coeur de la construction ce ce résultat. F. Durand et A. Maass [**DuMa03**] ont également obtenu ce type de résultat pour les systèmes de Cantor minimaux ayant un spectre périodique infini, avec une construction différente basée sur les diagrammes de Bratteli-Vershik.

CHAPITRE 3

Retour proche de l'état initial

Ce chapitre concerne les articles [**9, 10, 12, 13**] pour les vitesses de récurrence presque sûres et [**23**] pour leur analyse multifractale.

Soit τ_r le temps de retour dans un voisinage de taille $r > 0$ défini par

$$\tau_r(x) = \inf\{n \geq 1\colon d(f^n x, x) < r\}.$$

Nous avons défini dans les articles [**10, 13**] la vitesse de récurrence d'un point comme suit.

DÉFINITION 7. *Les* vitesses de récurrence inférieures *et* supérieures *sont définies par les limites*

$$\underline{R}(x) = \liminf_{r\to 0} \frac{\log \tau_r(x)}{-\log r} \quad \textit{et} \quad \overline{R}(x) = \limsup_{r\to 0} \frac{\log \tau_r(x)}{-\log r}.$$

Lorsque l'on a l'égalité $\underline{R}(x) = \overline{R}(x)$, on appellera la valeur commune, notée $R(x)$, la vitesse de récurrence *du point x.*

Notons que si $R(x)$ existe alors

$$\inf\{n > 0\colon d(f^n x, x) < r\} \approx r^{-R(x)},$$

où $\approx$ signifie ici l'équivalence des logarithmes lorsque $r \to 0$.

1. Dimensions dans les systèmes dynamiques

1.1. Dimensions d'ensembles et de mesures. Rappelons brièvement les notions de dimensions de Hausdorff. Soit X un espace métrique séparable. Etant donné un sous-ensemble $Z \subset X$ et un nombre réel $\alpha \geq 0$, on définit la *mesure de Hausdorff α-dimensionnelle* de Z par

$$m_\alpha(Z) = \lim_{\delta\to 0} \inf_{\mathcal{U}} \sum_{U\in\mathcal{U}} (\operatorname{diam} U)^\alpha,$$

où l'infimum est pris sur tous les recouvrements finis ou dénombrables $\mathcal{U}$ de Z par des ensembles de diamètre au plus δ. La *dimension de Hausdorff* de Z est définie par

$$\dim_H Z = \inf\{\alpha\colon m_\alpha(Z) = 0\}.$$

On définit aussi les *dimensions de boîte supérieure* et *inférieure* de Z par

$$\underline{\dim}_B Z = \liminf_{r\to 0} \frac{\log N(Z,r)}{\log r} \quad \text{et} \quad \overline{\dim}_B Z = \limsup_{r\to 0} \frac{\log N(Z,r)}{\log r},$$

où $N(Z,r)$ est le nombre minimal de boules de diamètre r nécessaire au recouvrement de Z. Il est facile de vérifier que

$$\dim_H Z \leq \underline{\dim}_B Z \leq \overline{\dim}_B Z.$$

Notons que ces inégalités peuvent être strictes. Remarquons également que les dimensions de boîtes d'un ensemble et de son adhérence coïncident.

La *dimension de Hausdorff* d'une mesure de probabilité μ sur X est donnée par

$$\dim_H \mu = \inf\{\dim_H Z \colon \mu(Z) = 1\},$$

et les *dimensions de boite inférieures* et *supérieures* de μ sont définies par

$$\underline{\dim}_B \mu = \lim_{\delta \to 0} \inf\{\underline{\dim}_B Z \colon \mu(Z) > 1 - \delta\}$$

et

$$\overline{\dim}_B \mu = \lim_{\delta \to 0} \inf\{\overline{\dim}_B Z \colon \mu(Z) > 1 - \delta\}.$$

Remarquons que, sans la possibilité de perdre une masse δ arbitrairement petite dans les définitions des dimensions de boîte d'une mesure, on aurait l'égalité bien peu intéressante entre ces dimensions et les dimensions du support topologique de la mesure $\operatorname{supp} \mu$.

On vérifie facilement les inégalités

$$\dim_H \mu \leq \underline{\dim}_B \mu \leq \overline{\dim}_B \mu.$$

Ces inégalités peuvent être strictes.

On définit les *dimensions ponctuelles inférieures* et *supérieures* d'une mesure μ au point x par

$$\underline{d}_\mu(x) = \liminf_{r \to 0} \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r} \quad \text{et} \quad \overline{d}_\mu(x) = \limsup_{r \to 0} \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r}.$$

Lorsque $\underline{d}_\mu(x) = \overline{d}_\mu(x)$, on appellera la valeur commune, notée $d_\mu(x)$, la *dimension ponctuelle* de la mesure μ au point x.

PROPOSITION 16. *Pour une mesure μ dont la dimension ponctuelle existe et est égale à une constante d μ-presque partout, les différentes notions de dimensions introduites coïncident*

$$\dim_H \mu = \underline{\dim}_B \mu = \overline{\dim}_B \mu = d.$$

1.2. Le cas des systèmes dynamiques. Soit (Λ, f) un répulseur conforme. Dans ce cas, la dimension de Λ est donnée par la formule de Bowen $P_f(-\dim_H \Lambda \log |f'||\Lambda) = 0$. Soit μ une mesure invariante ergodique d'entropie non nulle. La mesure a un unique exposant de Lyapunov λ_μ, et nous avons les relations suivantes

$$d_\mu(x) = \dim_H \mu = \frac{h_\mu(f)}{\lambda_\mu} = \frac{h_\mu(f)}{\int \log |f'| d\mu} \quad \mu\text{-presque partout.} \tag{2}$$

Pour les répulseurs non conformes, très peu de choses sont connues concernant la dimension de l'ensemble invariant lui-même et des mesures qui y sont portées. Il y a des résultats « presque sûrs » portant sur des familles à paramètres, ou bien des études de cas particuliers de nature algébrique.

L'équation (2) reste valable notamment pour les applications monotones par morceaux de l'intervalle sous des hypothèses très faibles de régularité.

THÉORÈME 17 ([**Ho95**], après [**HoRa92**]). *Soit f une application monotone par morceaux de l'intervalle avec une dérivée à p-variation bornée* [1] *pour un $p > 0$. Si μ est une mesure ergodique avec exposant de Lyapunov $\lambda_\mu > 0$ alors*

$$d_\mu(x) = \frac{h_\mu(f)}{\lambda_\mu} (= \dim_H \mu) \quad \textit{pour } \mu\textit{-presque tout } x.$$

Concernant les difféomorphismes, L.-S. Young [**Yo82**] a obtenu une formule qui généralise l'équation (2) aux difféomorphismes de surface de classe C^2 préservant une mesure hyperbolique μ. Cette formule devient

$$d_\mu(x) = \dim_H \mu = h_\mu(f) \left(\frac{1}{\lambda_\mu^+} - \frac{1}{\lambda_\mu^-} \right) \quad \mu\text{-presque partout.}$$

où λ_μ^+ et λ_μ^- désignent respectivement l'exposant de Lyapunov positif et négatif de la mesure μ. Notons que la seconde égalité est connue sous le nom de formule de McCluskey et Manning qui l'ont découverte.

F. Ledrappier et L.-S. Young [**LeYo85**] ont ensuite poursuivi ce travail en dimension supérieure. Ils ont construit, pour un difféomorphisme f sur une variété compacte X et une mesure invariante μ, deux partitions mesurables ξ^s et ξ^u de X telles que pour μ-presque tout $x \in X$:

(i) $\xi^s(x) \subset W_\epsilon^s(x)$ et $\xi^u(x) \subset W_\epsilon^u(x)$;

(ii) il existe $\gamma = \gamma(x) > 0$ tel que

$$\xi^s(x) \supset W_\epsilon^s(x) \cap B(x, \gamma) \quad \text{et} \quad \xi^u(x) \supset W_\epsilon^u(x) \cap B(x, \gamma)$$

Dénotons par μ_x^s et μ_x^u les mesures conditionnelles associées respectivement aux partitions ξ^s et ξ^u.

THÉORÈME 18 ([**LeYo85**]). *Soit f un difféomorphisme de classe $C^{1+\eta}$ d'une variété compacte lisse X, et μ une mesure invariante ergodique. Si la mesure μ est hyperbolique alors pour μ-presque tout $x \in X$ on a*

$$d_{\mu_x^s}(x) = \dim_H \mu_x^s \quad \textit{et} \quad d_{\mu_x^u}(x) = \dim_H \mu_x^u.$$

[1] On dira que f' mesurable est une dérivée de f si pour tout intervalle $[a, b]$ où f est monotone on a $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$.

L. Barreira, Y. Pesin et J. Schmeling ont finalement démontré que les dimensions ponctuelles stables et instables s'additionnaient pour donner la dimension ponctuelle des mesures hyperboliques.

Théorème 19 (Conjecture de Ruelle-Eckmann [**BaPeSc95**]). *Soit f un difféomorphisme de classe $C^{1+\eta}$ d'une variété compacte lisse X, et μ une mesure invariante ergodique. Si la mesure μ est hyperbolique alors*

$$d_\mu(x) = d_{\mu_x^s}(x) + d_{\mu_x^u}(x) = \dim_H \mu \text{ pour } \mu\text{-presque tout } x.$$

2. Majoration de la vitesse de récurrence

On se placera dans cette section dans le cadre d'une application $f\colon X \to X$ mesurable sur un espace métrique séparable (X, d).

On a un corollaire « topologique » du théorème de Poincaré.

Théorème 20 (Poincaré, voir [**Fu81**]). *Soit $f\colon X \to X$ une application mesurable sur un espace métrique séparable (X, d). Pour toute mesure invariante μ on a*

$$\liminf_{n\to\infty} d(f^n x, x) = 0 \quad \text{pour } \mu\text{-presque tout } x.$$

Bien plus tard, ce résultat a été précisé par M. Boshernitzan

Théorème 21 ([**Bo93**]). *Soit $f\colon X \to X$ une application mesurable sur un espace métrique (X, d). Supposons que la mesure de Hausdorff α-dimensionnelle m_α soit σ-finie sur X. Alors pour toute mesure invariante μ on a*

$$\liminf_{n\to\infty} n^{1/\alpha} d(f^n x, x) < \infty \quad \text{pour } \mu\text{-presque tout } x.$$

Il est assez facile d'en déduire un première information concernant les vitesses de récurrence.

Théorème 22 (Boshernitzan, voir [**10**]). *Si $f\colon X \to X$ est une application mesurable sur un espace métrique (X, d) préservant une mesure invariante μ alors*

$$\underline{R}(x) \le \dim_H \mu \quad \text{pour } \mu\text{-presque tout } x.$$

Nous avons affiné ce résultat grâce aux dimensions ponctuelles

Théorème 23 ([**10**]). *Si $f\colon X \to X$ est une application mesurable sur un mesurable $X \subset \mathbb{R}^d$ pour un entier d, préservant une mesure invariante μ alors*

$$\underline{R}(x) \le \underline{d}_\mu(x) \quad \text{et} \quad \overline{R}(x) \le \overline{d}_\mu(x)$$

pour μ-presque tout $x \in X$.

Au vu de l'équation $\dim_H \mu = \text{sup-essentiel}\, \underline{d}_\mu$, on peut remarquer l'amélioration par rapport au théorème précédent. Cependant, l'apport majeur de ce théorème réside dans la seconde inégalité à savoir, la majoration de la vitesse supérieure de récurrence, qui constitue la première étape vers le calcul de la vitesse de récurrence.

3. Calcul de la vitesse de récurrence

3.1. Temps de répétition ou vitesse de récurrence symbolique. Soit $(X, \mathcal{B}, f, \mu)$ un système dynamique mesuré et ξ une partition mesurable finie de X. On définit les *temps de répétition* des n premiers symboles de x par ξ de la façon suivante. On notera tout d'abord $\xi^n(x)$ l'élément de la partition $\xi^n \overset{\text{def}}{=} \xi \vee f^{-1}\xi \vee \cdots \vee f^{-n+1}\xi$ contenant x, puis

$$R_n(x, \xi) \overset{\text{def}}{=} \inf\{k \geq 1 \colon f^k x \in \xi^n(x)\}. \tag{3}$$

D. Ornstein et B. Weiss on montré le lien existant entre les temps de répétition et l'entropie.

THÉORÈME 24 ([**OrWe93**] [2]). *Si μ est une mesure d'entropie $h_\mu(f|\xi)$ non nulle alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log R_n(x,\xi)}{n} = h_\mu(f|\xi) \quad \textit{pour } \mu\textit{-presque tout } x.$$

Ce résultat a ensuite été généralisé au cas des partitions ξ dénombrables d'entropie $H(\xi) < \infty$ par A. Quas [**Qu98**].

Notons que muni de la (pseudo-)distance

$$d(x, y) = \mathrm{e}^{-n} \text{ si } n = \min\{k \geq 0 \colon \xi^k(x) \neq \xi^k(y)\}$$

on a la relation

$$R_n(x, \xi) = \tau_{\mathrm{e}^{-n}}(x),$$

si bien que le résultat du théorème peut se récrire

$$R(x) = \dim_H \mu \quad \text{pour } \mu\text{-presque tout } x.$$

Ce théorème ouvre une voie pour calculer de façon numérique l'entropie d'une source. Toutefois, pour avoir confiance dans le calcul, il est intéressant de connaître les fluctuations par rapport à la limite.

THÉORÈME 25 ([**9**]). *Si les temps de retour sont exponentiellement distribués sur les cylindres de la partition ξ alors les fluctuations des temps de répétition et celles des mesures des cylindres autour de l'entropie sont asymptotiquement les mêmes.*

[2]Pour être tout à fait exact, D. Ornstein et B. Weiss ont considéré les temps de répétitions définis *sans chevauchement*, c'est-à-dire que $k \geq n$ dans l'équation (3), et A. Quas a remarqué que l'on pouvait s'affranchir de cette restriction.

On retrouve en particulier le fait démontré par P. Collet, A. Galves et B. Schmitt que les temps de répétition ont des fluctuations Gaussiennes pour les mesures de Gibbs.

THÉORÈME 26 ([**CoGaSs99**]). *Soit Σ_A un sous-shift de type fini et $\varphi\colon \Sigma_A \to \mathbb{R}$ un potentiel Hölder, non cohomologue à une constante. Soit ξ la partition en 1-cylindres. Alors on a la convergence à la loi normale*

$$\frac{\log R_n(\cdot,\xi) - nh_{\mu_\varphi}}{\varsigma\sqrt{n}} \overset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} \mathcal{N}(0,1).$$

où la variance ς vaut $\varsigma^2 = \int \varphi^2 + 2\sum_{n\geq 1}\int \varphi\varphi\circ\sigma^n \neq 0$.

Cette distribution log-normale des temps de répétition a depuis été établie pour d'autres systèmes plus délicats à traiter. Citons F. Paccaut [**Pa00**] pour les applications monotones par morceaux de l'intervalle, sans partition de Markov mais sous condition de « covering » et H. Bruin et S. Vaienti [**BrVa03**] pour une classe très large d'applications unimodales.

3.2. Vitesse de récurrence. En combinant les résultats de D. Ornstein et B. Weiss, ainsi que ceux de F. Hofbauer et P. Raith nous avons établi le résultat suivant.

THÉORÈME 27 ([**13**]). *Soit f une application monotone par morceaux de l'intervalle avec une dérivée à p-variation bornée pour un $p > 0$. Si μ est une mesure ergodique d'entropie $h_\mu > 0$ alors*

$$R(x) = \dim_H \mu \left(= \frac{h_\mu(f)}{\lambda_\mu}\right) \quad \textit{pour } \mu\textit{-presque tout } x.$$

La méthode employée consiste en une approximation fine des boules par des cylindres. Celle-ci est bien efficace en dimension un ou bien plus généralement pour des dynamiques conformes.

Notons que parmi les systèmes d'entropie nulle il y a des contre-exemples a l'égalité $R = \dim_H \mu$.

PROPOSITION 28 ([**10**]). *Soit f une rotation du cercle d'un angle α bien approximable par les rationnels, c'est-à-dire que $\nu(\alpha)$, le supremum des $\nu > 0$ tels que $|\alpha - p/q| < 1/q^{\nu+1}$ pour une infinité de p, q premiers entre-eux, est strictement supérieur à 1. Alors la mesure de Lebesgue μ est l'unique mesure invariante et pour tout x on a*

$$\underline{R}(x) \leq \frac{1}{\nu(\alpha)} < 1 = \dim_H \mu.$$

En dimension supérieure, lorsque plusieurs exposants de Lyapunov coexistent, l'approximation des boules par des cylindres devient très grossière[3]. Nous avons identifié une classe de systèmes pour lesquels les vitesses de récurrence sont égales à la dimension. Ce sont essentiellement des systèmes qui ont des vitesses de mélange suffisamment rapides. Pour les répulseurs, nous avons obtenu le résultat suivant.

THÉORÈME 29 ([**12**]). *Soit* (Λ, f) *un endomorphisme uniformément dilatant. Soit* μ *un état d'équilibre d'un potentiel Hölder. Alors, on a l'égalité*

$$R(x) = \dim_H \mu \quad \text{pour } \mu\text{-presque tout } x.$$

Considérons maintenant le cas des difféomorphismes de l'axiome A.

THÉORÈME 30 ([**10**]). *Soit* (Λ, f) *un difféomorphisme uniformément hyperbolique. Soit* μ *un état d'équilibre d'un potentiel Hölder. Alors, on a l'égalité*

$$R(x) = \dim_H \mu \quad \text{pour } \mu\text{-presque tout } x.$$

CONJECTURE. *Soit* $f\colon X \to X$ *un difféomorphisme de classe* $C^{1+\eta}$ *d'une variété lisse* X*, et* μ *une mesure invariante ergodique. Si la mesure* μ *est hyperbolique alors*

$$R(x) = \dim_H \mu \quad \text{pour } \mu\text{-presque tout } x.$$

Les difféomorphismes hyperboliques possèdent une structure produit, qui se reflète dans les mesures invariantes (voir théorème 19). Nous nous sommes intéressés à la question de savoir si cette structure produit se retrouvait dans la récurrence. Pour ce faire, nous avons défini les *temps de retour stables* et *instables* de la façon suivante. On notera d^s et d^u les distances induites sur les variétés stables et instables par d. Soit $\delta > 0$ tel que le produit $[\cdot, \cdot]$ soit défini. On définit les temps de retour stables et instables par

$$\tau_r^s(x,\rho) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{n \in \mathbb{N}\colon d(f^{-n}x, x) \le \rho \text{ et } d^s([x, f^{-n}x], x) < r\},$$
$$\tau_r^u(x,\rho) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{n \in \mathbb{N}\colon d(f^{n}x, x) \le \rho \text{ et } d^u([f^{n}x, x], x) < r\}.$$

Notons que le temps de retour stable pour f est le temps de retour instable pour f^{-1}. On pose alors

$$\underline{R}^s(x,\rho) = \liminf_{r\to 0} \frac{\log \tau_r^s(x,\rho)}{-\log r} \text{ et } \overline{R}^s(x,\rho) = \limsup_{r\to 0} \frac{\log \tau_r^s(x,\rho)}{-\log r}$$

[3]Pas toujours. Les propositions 41 et 42 du chapitre 4 montrent, par exemple, que ces idées peuvent mener à des résultats, dans un certains sens, optimaux.

puis les vitesses inférieures et supérieures de récurrence stable sont définies par

$$\underline{R}^s(x) = \lim_{\rho\to 0} \underline{R}^s(x,\rho) \text{ et } \overline{R}^s(x) = \lim_{\rho\to 0} \overline{R}^s(x,\rho)$$

Lorsque $\underline{R}^s(x) = \overline{R}^s(x)$ on appellera la valeur commune, dénotée par $R^s(x)$, la *vitesse de récurrence stable* du point x. On définit de la même façon la *vitesse de récurrence instable* R^u à partir des temps de retour instables $\tau_r^u(x,\rho)$. Le théorème qui suit révèle une structure produit des temps de retour.

THÉORÈME 31 ([**12**]). *Soit (Λ, f) un difféomorphisme uniformément hyperbolique et μ un état d'équilibre d'un potentiel Hölder. Pour μ-presque tout $x\in\Lambda$ les propriétés suivantes sont satisfaites :*

(1) *les vitesses de récurrence stables et instables existent et sont égales aux dimensions stables et instables des mesures*

$$R^s(x) = d_{\mu_x^s}(x) \quad et \quad R^u(x) = d_{\mu_x^u}(x);$$

(2) *la vitesse de récurrence est égale à la somme des vitesses de récurrence stables et instables, i.e.*

$$R(x) = R^s(x) + R^u(x);$$

(3) *il existe $\rho(x) > 0$ tel que pour tout $\rho < \rho(x)$ et $\epsilon > 0$ il existe $r(x,\rho,\epsilon) > 0$ tel que si $r < r(x,\rho,\epsilon)$ alors*

$$r^\epsilon < \frac{\tau_r^s(x,\rho)\cdot\tau_r^u(x,\rho)}{\tau_r(x)} < r^{-\epsilon}.$$

La preuve de ce résultat comprend plusieurs étapes. On prend un rectangle R d'une partition de Markov. On considère alors l'application induite f_R. A partir de celle-ci, on construit *l'application instable* définie sur la variété instable locale $W_R^u(z) \overset{\text{def}}{=} W_\epsilon^u(z)\cap R$ d'un point z par

$$f_{z,u}(x) = [f_R x, x].$$

Nous montrons alors que $f_{z,u}$ appartient à une classe de répulseurs « généralisés » que nous avons introduite à cet effet, pour lesquels on peut établir une version du théorème 29. Pour ce faire, nous utilisons un résultat intermédiaire concernant les bords des partitions de Markov.

THÉORÈME 32 ([**12**]). *Soit (Λ, f) un difféomorphisme uniformément hyperbolique ou un endomorphisme uniformément dilatant et $\mathcal{R}$ une partition de Markov. Soit μ un état d'équilibre d'un potentiel Hölder. Il existe deux constantes $c,\nu>0$ telles que pour tout $\epsilon>0$*

$$\mu(x\in\Lambda\colon d(x,\partial\mathcal{R})<\epsilon)\le c\epsilon^\nu.$$

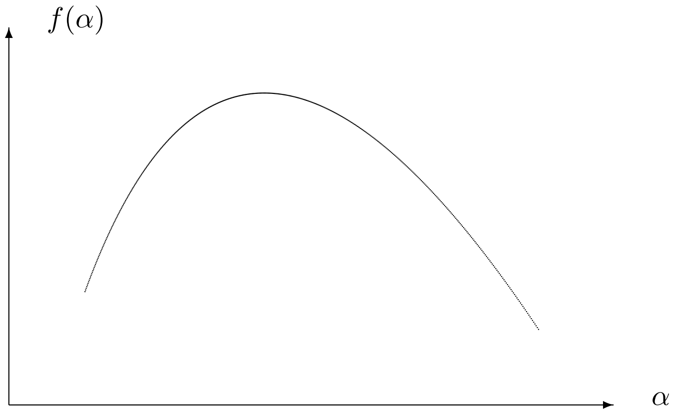

FIG. 1. Graphe typique de l'analyse multifractale

Ce type d'estimation assure que les trajectoires typiques ne s'approchent qu'à une vitesse sous-exponentielle du bord. Rappelons qu'en général les partitions de Markov ont un bord très irrégulier [**Bo78**] et donc on ne peut pas utiliser d'arguments géométriques pour établir ce théorème. Toutefois, le formalisme thermodynamique s'applique ici avec succès.

4. Analyse multifractale de la vitesse de récurrence

Nous commencerons par un rappel de l'analyse multifractale des systèmes dynamiques. La dimension ponctuelle $d_\mu(x)$ d'une mesure μ est quelquefois appelée l'exposant local « de fractalité » de la mesure au point x. Cet exposant détermine comment la masse se distribue localement. L'analyse multifractale a été introduite pour mesurer les ensembles de niveau des exposants locaux

$$K_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : d_\mu(x) = \alpha\}.$$

Il s'est avéré qu'une façon pertinente de mesurer ces ensembles était de calculer leur dimension de Hausdorff, et donc d'étudier la courbe

$$f(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \dim_H K_\alpha.$$

Le résultat obtenu dans le cadre d'état d'équilibre d'un potentiel Hölder sur un répulseur conforme est une courbe supportée sur un segment, où elle est analytique et strictement concave (voir la Figure 1).

Depuis, l'analyse multifractale des systèmes dynamiques, au sens large, regroupe l'étude des courbes de niveaux de quantités dynamiques telles que les dimensions ponctuelles de mesures invariantes ou leur entropie locale, les moyennes de Birkhoff des observables, etc. Les fonctions d'ensemble utilisées sont tantôt la dimension de Hausdorff, l'entropie topologique[4] ou encore des pressions topologiques.

N. Haydn, J. Luevano, G. Mantica et S. Vaienti [**HaLuMaVa01**] ont initié une étude « thermodynamique » de la récurrence, qu'il serait intéressant de continuer, mais cela ne constitue pas, dans le sens où on l'entend ici, une analyse multifractale de la récurrence.

Dans un cadre symbolique D.-J. Feng et J. Wu ont effectué l'analyse multifractale des vitesses de récurrence.

Théorème 33 ([**FeWu01**]). *Soit (Σ_A^+, σ) un sous-shift de type fini topologiquement mélangeant. Alors pour tous $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \infty$ on a*

$$\mathrm{h_{top}}\left(\{\omega \in \Sigma_A^+ \colon \underline{R}(x) = \alpha \text{ et } \overline{R}(x) = \beta\}\right) = \mathrm{h_{top}}(\sigma).$$

Notons qu'il s'agit ici de l'entropie topologique au sens de Bowen. Sans la redéfinir ici, nous nous contenterons de l'égalité valide dans le cadre du théorème sus-cité

$$\mathrm{h_{top}}(K) = \dim_H K \text{ pour tout ensemble } K.$$

Avec J. Wu nous avons généralisé ce résultat au cas géométrique des répulseurs conformes

Théorème 34 ([**23**]). *Soit (Λ, f) un répulseur conforme. Alors pour tous $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \infty$ on a*

$$\dim_H\left(\{\omega \in \Sigma_A^+ \colon \underline{R}(x) = \alpha \text{ et } \overline{R}(x) = \beta\}\right) = \dim_H \Lambda.$$

Remarquons que la preuve de ce résultat n'est pas une adaptation directe de celle du cas symbolique. Une difficulté majeure tient aux possibles effets de bord. L'argument par D.-J. Feng et J. Wu produit des points ayant les bons temps de répétition. Mais ces points ne peuvent pas être typiques par rapport à une mesure invariante — en particulier le théorème 32 n'est d'aucune utilité — c'est pourquoi il est difficile de contrôler leur distance au bord de la partition de Markov le long de l'orbite. Malheureusement, ceci est essentiel pour exploiter l'information symbolique et trouver des estimations précises sur les vitesses de récurrence. Pour franchir cet obstacle, nous travaillons sur des sous-systèmes de Cantor qui sont conjugués à des sous-shifts de type fini. A cet effet, nous avons démontré cette proposition d'un intérêt indépendant.

[4]il s'agit ici de la définition de l'entropie topologique donnée par Bowen. En effet, les ensembles de niveaux sont en général non compacts, et la définition classique perd son sens.

PROPOSITION 35 ([**23**]). *Soit Λ un répulseur conforme d'une application f de classe $C^{1+\eta}$. Il existe des sous ensembles $\Lambda_n \subset \Lambda$ tels que*

(i) (f, Λ_n) *est conjugué à un sous-shift de type fini ;*

(ii) $\lim_{n\to\infty} \dim_H \Lambda_n = \dim_H \Lambda$.

La preuve de cette proposition repose sur une intéressante étude des « systèmes à trou ». En fait, Λ_n est l'ensemble des trajectoires n'entrant jamais dans un voisinage cylindrique d'ordre n du bord d'une partition de Markov de (Λ, f). On peut noter qu'une version de ce résultat a été démontrée par B. Fernadez, E. Ugalde et J. Urias [**FeUgUr02**] pour des applications Markoviennes de l'intervalle, par une méthode combinatoire.

CHAPITRE 4

Temps de retour minimal

Ce chapitre concerne les articles [**3, 13, 16, 17, 21**].

Soit $f\colon X \to X$ une application. On définit le *temps de retour* ou la *récurrence de Poincaré* d'un sous-ensemble $A \subset X$ par

$$\tau(A) = \inf_{x \in A} \tau_A(x)$$

où $\tau_A(x)$ représente, rappelons-le, le premier temps de retour d'un point $x \in A$. Il est facile de vérifier que

$$\begin{aligned}\tau(A) &= \inf\{n \in \mathbb{N}\colon f^n A \cap A \neq \emptyset\}\\ &= \inf\{n \in \mathbb{N}\colon f^{-n} A \cap A \neq \emptyset\}.\end{aligned}$$

Cette définition a été introduite par V. Afraimovich [**Af97**] dans le cadre des systèmes minimaux sur des espaces métriques pour étudier la *dimension de récurrence* définie en section 2.

1. Etude locale de la récurrence des ensembles

1.1. Vitesse de retour des cylindres. Soit $(X, \mathcal{B}, f, \mu)$ un système dynamique mesuré et ξ une partition mesurable de X. Nous avions défini dans [**5**] la vitesse de retour des cylindres comme

$$\underline{V}(x) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\tau(\xi^n(x))}{n} \quad \text{et} \quad \overline{V}(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\tau(\xi^n(x))}{n}.$$

Nous y avions remarqué que ces fonctions étaient μ-presque partout sous-additives, donc invariantes. Ces fonctions contrôlent les retours rapides dans les ensembles $\xi^n(x)$. Nous avions montré dans [**5**] que, pour les mesures de Gibbs de potentiel Hölder ainsi que pour la mesure absolument continue d'une application avec point fixe neutre, on avait $\underline{V}(x) \geq 1$ pour μ-presque tout x. Ceci était une étape dans la preuve de la distribution de Poisson des temps de retour, abordée au chapitre 2. J'ai également montré dans ce chapitre que cette vitesse détermine la vitesse de convergence à la loi exponentielle (théorème 10).

En utilisant le point de vue de la complexité de Kolmogorov, grâce à un raffinement dû à H. White [**Wh93, Wh91**] d'un remarquable théorème de

A. Brudno [**Br83**], reliant la complexité de Kolmogorov à l'entropie, nous avons obtenu le résultat suivant

THÉORÈME 36 ([**13**]). *Soit $(X, \mathcal{B}, f, \mu)$ un système dynamique mesuré. Si ξ est une partition finie ou dénombrable d'entropie $h_\mu(f|\xi)$ non nulle alors la vitesse inférieure de retour des cylindres est presque sûrement au moins égale à 1, i.e.*

$$\underline{V}(x) \geq 1 \quad \textit{pour } \mu\textit{-presque tout } x.$$

Notons que, par ailleurs si la propriété de spécification est vérifiée, alors on a également $\overline{V}(x) \leq 1$ pour tout x, et donc $V(x) = 1$ μ-pp.

Il est absolument nécessaire de remarquer à ce point la différence entre les temps de retour « typiques » et les temps de retour minimaux. En effet, au chapitre 3, nous avons vu que le théorème d'Ornstein et Weiss donnait

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \tau_{\xi^n(x)}(x) = h_\mu(f|\xi)$$

alors qu'ici nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \tau(\xi^n(x)) = 1$$

pour les systèmes d'entropie positive avec spécification. La première quantité est exponentielle en n alors que la seconde n'est que linéaire.

Avec J.-R. Chazottes et V. Afraimovich, nous avons ensuite recherché une preuve directe, c'est-à-dire utilisant uniquement le théorème de Shannon-McMillan-Breiman, du résultat précédent. Celle-ci se généralisait facilement au cas des systèmes inversibles. Soit $f\colon X \to X$ une application mesurable, inversible, et ξ une partition mesurable de X. On dénote par $\xi_m^n(x)$ l'unique élément de la partition $\xi_m^n \stackrel{\text{def}}{=} f^m\xi \vee \cdots \vee f\xi \vee \xi \vee f^{-1}\xi \vee \cdots \vee f^n\xi$ contenant le point x.

THÉORÈME 37 ([**16**]). *Soit $(X, \mathcal{B}, f, \mu)$ un système dynamique mesuré avec f inversible et bimesurable. Si ξ est une partition finie ou dénombrable d'entropie $h_\mu(f|\xi)$ non nulle alors la vitesse inférieure de retour des cylindres est presque sûrement au moins égale à 1, i.e.*

$$\liminf_{m+n\to\infty} \frac{\log \tau(\xi_m^n(x))}{m+n} \geq 1 \quad \textit{pour } \mu\textit{-presque tout } x.$$

1.2. Vitesse de retour des boules. Pour les applications de l'intervalle F. Hofbauer et P. Raith, on construit des partitions adaptées à la métrique et, grâce à elles, nous avons pu transcrire ces résultats symboliques dans le cadre de l'intervalle.

THÉORÈME 38 ([**13**]). *Soit f une application monotone par morceaux de l'intervalle avec une dérivée à p-variation bornée pour un $p > 0$. Si μ est une mesure ergodique d'entropie $h_\mu > 0$ alors*

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\tau(B(x,r))}{-\log r} \geq \frac{1}{\lambda_\mu} \quad \textit{pour } \mu\textit{-presque tout } x.$$

Nous avons alors poursuivi ces recherches, avec S. Vaienti et S. Troubetzkoy, dans le cadre des applications en dimension supérieure. On considère dorénavant un difféomorphisme f de classe $C^{1+\eta}$ et une mesure invariante ergodique μ. Avec les notations de la section 2, les exposants de Lyapunov seront classés par ordre croissant $\lambda_1 < \cdots < \lambda_r$. On notera Λ_μ^u (resp. Λ_μ^s) le plus grand ($=\lambda_r$) (resp. petit ($=\lambda_1$) exposant de Lyapunov. Pour une mesure hyperbolique, on notera aussi λ_μ^u (resp. λ_μ^s) le plus petit exposant positif (resp. grand exposant négatif). Nous avons donc

$$\Lambda_\mu^s \leq \lambda_\mu^s < 0 < \lambda_\mu^u \leq \Lambda_\mu^u.$$

A ce niveau de généralités, le théorème 32 ne s'applique pas. Or, pour utiliser les résultats symboliques de la section précédente, nous avons encore besoin de partitions particulières.

PROPOSITION 39 ([**10**]). *Soit $f\colon X \to X$ une application d'un espace métrique séparable (X,d) et μ une mesure de probabilité f-invariante d'entropie $h_\mu(f)$ non nulle. Il existe une partition au plus dénombrable ξ d'entropie $h_\mu(f|\xi)$ non nulle telle que*

$$\mu(\{x \in X\colon d(x, X \setminus \xi(x)) < r\}) < cr$$

pour tout $r > 0$, pour une constante c. Ici $\xi(x)$ désigne l'élément de la partition ξ contenant x.

La particularité d'une telle partition est que les orbites des points typiques ne peuvent s'approcher qu'à une vitesse sous-exponentielle du bord. Ceci permet, en utilisant par ailleurs les cartes de Lyapunov, de garder un bon contrôle du diamètre intérieur des cylindres et donc de comparer les boules et les cylindres. Le résultat symbolique de la section précédente s'applique alors pour donner le théorème suivant.

THÉORÈME 40 ([**21**]). *Soit f un difféomorphisme de classe $C^{1+\eta}$ et μ une mesure f-invariante ergodique.*

Si la mesure μ est d'entropie $h_\mu(f) > 0$ alors

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\tau(B(x,r))}{\log 1/r} \geq \frac{1}{\Lambda_\mu^u} - \frac{1}{\Lambda_\mu^s}$$

pour μ-presque tout x.

Si la mesure μ est hyperbolique et $f|_{\operatorname{supp}\mu}$ satisfait la spécification non-uniforme[1] *alors*

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\tau(B(x,r))}{\log 1/r} \le \frac{1}{\lambda^u_\mu} - \frac{1}{\lambda^s_\mu}$$

pour μ-presque tout x.

Dans le cas des difféomorphisme des surfaces, on a le corollaire

Corollaire 1 ([**21**]). *Soit f un difféomorphisme de surface et μ une mesure invariante ergodique d'entropie $h_\mu(f) > 0$. Si $f|_{\operatorname{supp}\mu}$ satisfait la spécification non-uniforme alors*

$$\lim_{r\to 0} \frac{\tau(B(x,r))}{\log 1/r} = \frac{1}{\Lambda^u_\mu} - \frac{1}{\Lambda^s_\mu} = \frac{1}{\lambda^u_\mu} - \frac{1}{\lambda^s_\mu}$$

pour μ-presque tout x.

Corollaire 2 ([**21**]). *Supposons que* $(\operatorname{supp}\mu, f)$ *soit un difféomorphisme uniformément hyperbolique. Dans ce cas on a*

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\tau(B(x,r))}{\log 1/r} \le \frac{1}{\lambda^u_\mu} - \frac{1}{\lambda^s_\mu}$$

pour μ-presque tout x. Si f est de plus un difféomorphisme de surface d'entropie $h_\mu(f) > 0$, alors la limite existe et est égale au membre de droite de cette inégalité.

Là encore, on peut comparer les croissances d'ordre logarithmique pour le temps de premier retour des boules et polynomial pour le temps de retour des points typiques,

$$\lim_{r\to 0} \frac{\tau(B(x,r))}{\log 1/r} = \frac{1}{\lambda^u_\mu} - \frac{1}{\lambda^s_\mu} \quad \text{et} \quad \lim_{r\to 0} \frac{\log \tau_{B(x,r)}(x)}{\log 1/r} = \dim_H \mu,$$

pour un difféomorphisme de surface uniformément hyperbolique et une mesure d'entropie non nulle.

Les exemples suivants montrent que sans hypothèses supplémentaires les bornes obtenues sont optimales, même lorsque

$$\Lambda^s_\mu < \lambda^s_\mu < 0 < \lambda^u_\mu < \Lambda^u_\mu.$$

Proposition 41 ([**21**]). *Supposons que l'automorphisme linéaire $A \overset{\text{def}}{=} A_1 \times A_2$ de $\mathbb{T}^4$ soit le produit direct de deux automorphismes linéaires hyperboliques A_1, A_2 de $\mathbb{T}^2$.*

[1] Il s'agit d'une spécification adaptée aux cartes de Lyapunov disponibles pour les mesures invariantes. Très brièvement, toute boule de Bowen « non-uniforme » $\widetilde{B}(x, m, n, \epsilon)$ doit contenir au moins un point périodique de période, au plus, de l'ordre de $m + n$. On renvoie à l'article original ci-après [**21**] pour la définition précise.

Si μ_i, $i = 1, 2$ sont des mesures A_i-invariantes, ergodiques, d'entropies positives alors la mesure $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \mu_1 \times \mu_2$ vérifie

$$\lim_{r\to 0} \frac{\tau(B(x,r))}{\log 1/r} = \frac{1}{\lambda_\mu^u} - \frac{1}{\lambda_\mu^s}$$

pour μ-presque tout x.

Proposition 42 ([**21**]). *Supposons que l'automorphisme linéaire $A \stackrel{\text{def}}{=} A_1 \times A_2$ de $\mathbb{T}^4$ soit le produit direct de deux automorphismes linéaires hyperboliques A_1, A_2 de $\mathbb{T}^2$.*

Il existe une mesure ergodique A-invariante, d'entropie positive, telle que

$$\lim_{r\to 0} \frac{\tau(B(x,r))}{\log 1/r} = \frac{1}{\Lambda_\mu^u} - \frac{1}{\Lambda_\mu^s}$$

pour μ-presque tout x.

Il existe toutefois des cas où les bornes obtenues sont strictes.

Proposition 43 ([**21**]). *Il existe une application linéaire uniformément dilatante du tore $\mathbb{T}^2$ telle que*

$$\frac{1}{\Lambda_u} < \lim_{r\to 0} \frac{\tau(B(x,r))}{\log 1/r} = \frac{2}{\Lambda^u + \lambda^u} < \frac{1}{\lambda^u}$$

pour Lebesgue presque-tout x.

Une partie de la preuve de cette proposition peut être conduite dans le cadre des difféomorphismes uniformément hyperboliques pour donner

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\tau(B(x,r))}{\log 1/r} \geq \frac{\dim_H \mu}{\mathrm{h_{top}}(f)} \quad \text{pour } \mu\text{-presque tout } x.$$

Cette borne inférieure, bien que parfois plus fine que celle donnée par le théorème 40, n'est certainement pas optimale.

Conjecture. *Si f est un difféomorphisme et μ une mesure f-invariante, ergodique, hyperbolique, d'entropie non nulle alors*

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\tau(B(x,r))}{\log 1/r} \geq \frac{\dim_H \mu}{h_\mu(f)} \quad \textit{pour } \mu\textit{-presque tout } x.$$

2. Etude globale de la récurrence

Dans un système minimal, tous les ouverts non vides ont des récurrences de Poincaré finies. Par ailleurs, par continuité et absence de points périodiques on a

$$\lim_{r\to 0} \tau(B(x,r)) = +\infty \quad \text{pour } \textbf{tout} \text{ point } x.$$

La *dimension de récurrence* a été introduite par V. Afraimovich, dans les systèmes minimaux, comme suit. Considérons tout d'abord les quantités

$$M(A,\alpha) = \lim_{\delta\to 0}\inf_{\mathcal{U}} \sum_{U\in\mathcal{U}} \frac{1}{\tau(U)^\alpha}$$

où l'infimum est pris sur tout les recouvrements $\mathcal{U}$ de A par des boules de diamètre au plus δ. La fonction $\alpha \mapsto M(A,\alpha)$ est décroissante et a un point de transition

$$\alpha_c(A) = \inf\{\alpha\colon M(A,\alpha) = 0\} = \sup\{\alpha\colon M(A,\alpha) = +\infty\}.$$

On appelle $\alpha_c(A)$ la dimension de récurrence de l'ensemble A. On peut noter que des fonctions de jauges autres que l'hyperbole sont possibles. Par exemple, au lieu de $\frac{1}{\tau(U)^\alpha}$ on peut prendre $\mathrm{e}^{-\alpha\tau(A)}$.

Par la suite avec V. Penné et S. Vaienti, nous avons montré que cette définition avait un sens également dans les systèmes non minimaux, pour peu que l'on accepte de ne pas avoir un point de transition net entre $+\infty$ et 0, mais entre $+\infty$ et un nombre fini. En effet, en présence de points périodiques, on a $M(A,\alpha) > 0$ quel que soit α.

Rappelons que, pour la dimension de Hausdorff, la nature des ensembles employés pour le recouvrement ne joue aucun rôle. Par contre, la dimension de récurrence devient triviale si l'on autorise les recouvrements par des ensembles quelconques (notons que la preuve utilise l'axiome du choix).

Théorème 44 ([**3**]). *En autorisant des recouvrements $\mathcal{U}$ par des ensembles quelconques, la mesure $M(\cdot,\alpha)$ est concentrée sur les points périodiques. De plus, avec la jauge $\mathrm{e}^{-\alpha\tau(U)}$, on a*

$$\alpha_c(X) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \operatorname{card} \operatorname{Per}(n),$$

lorsque $\operatorname{Per}(n) < \infty$ *pour tout n, sinon $\alpha_c(X) = +\infty$, où* $\operatorname{Per}(n)$ *dénote l'ensemble des points périodiques de plus petite période n.*

On définit la dimension de récurrence d'une mesure μ par

$$\alpha_c(\mu) = \inf\{\alpha_c(A)\colon \mu(A) = 1\}.$$

Les recouvrements par des ensembles ouverts ou fermés mènent aussi à des comportements de peu d'intérêt comme l'atteste le phénomène suivant.

Théorème 45 ([**3**]). *Supposons que $f\colon X \to X$ soit un endomorphisme mesurable préservant une mesure ergodique et apériodique μ et que la dimension de boite $\overline{\dim}_B X < \infty$. Alors la dimension de récurrence de μ construite avec des recouvrements $\mathcal{U}$ par des ensembles arbitraires, ouverts, ou fermés est triviale : $\alpha_c(\mu) = 0$.*

Toutefois, on ne sait pas si pour des recouvrements ouverts ou fermés la mesure $M(\cdot,\alpha)$ se concentre uniquement sur les points périodiques.

V. Afraimovich, J. Schmeling, E. Ugalde et J. Urias [**AfScUgUr00**] ont introduit les mesures extérieures suivantes,

$$M(A,\alpha,q)=\lim_{\delta\to 0}\inf_{\mathcal{U}}\sum_{U\in\mathcal{U}} \mathrm{e}^{-q\tau(U)}(\operatorname{diam} U)^{\alpha},$$

où l'infimum est pris sur toutes les collections finies ou dénombrables de boules de diamètre au plus δ. Puis, ils ont définit le spectre de récurrence d'un ensemble A par

$$\alpha(A,q)=\inf\{\alpha\colon M(A,\alpha,q)=0\}=\sup\{\alpha\colon M(A,\alpha,q)=+\infty\}.$$

Dans un cadre de systèmes de fonctions itérés (IFS), ils ont obtenu des relations entre ces spectres de récurrence et la pression d'un potentiel issu de la géométrie du système. B. Fernandez, E. Ugalde et J. Urias ont effectué cette analyse pour des applications Markoviennes f de l'intervalle et ont également exprimé le spectre de récurrence en fonction de pressions. Ils obtiennent une formule de Bowen « non-homogène »

THÉORÈME 46 ([**FeUgUr02**]). *Soit f une application Markovienne d'un intervalle X topologiquement mélangeante. Alors sur le domaine $\alpha\geq 0$ et $q\geq 0$, on a la relation $P(-\alpha\log|f'|)=q$.*

Avec J.-R. Chazottes, nous avons également défini le spectre de récurrence d'une mesure μ par

$$\alpha(\mu,q)=\inf\{\alpha(A,q)\colon \mu(A)=1\}.$$

Il serait intéressant d'établir un principe variationnel pour le spectre de récurrence.

Afin de calculer les dimensions de récurrence des mesures, nous avons introduit en nous inspirant de Y. Pesin [**Pe99**] la dimension ponctuelle associée au spectre de récurrence d'une mesure par

$$d_{\mu,q}(x)=\liminf_{r\to 0}\inf_{y\in B(x,r)}\frac{\log\mu(B(y,r))+q\tau(B(y,r))}{\log r}. \tag{4}$$

A priori, on ne peut pas écarter l'infimum sur $y\in B(x,r)$. Toutefois, quand $q=0$ on a l'égalité $d_{\mu,0}(x)=\underline{d}_{\mu}(x)$.

THÉORÈME 47 ([**17**]). *Pour toute mesure μ on a*

$$\alpha(\mu,q)=\mu\text{-}\,\text{sup-essentiel}\,d_{\mu,q}.$$

Comme corollaire des estimations de vitesse de retour des boules nous obtenons

Corollaire 3 ([**21**]). *Soit f un difféomorphisme préservant une mesure f-invariante μ, ergodique et d'entropie $h_\mu(f) > 0$. On a*

$$\alpha(\mu, q) \leq \dim_H \mu - q\left(\frac{1}{\Lambda_\mu^u} - \frac{1}{\Lambda_\mu^s}\right) \quad \textit{si } q \geq 0,$$
$$\alpha(\mu, q) \geq \dim_H \mu - q\left(\frac{1}{\lambda_\mu^u} - \frac{1}{\lambda_\mu^s}\right) \quad \textit{si } q \leq 0.$$

Corollaire 4 ([**21**]). *Si f est un difféomorphisme de surface, μ une mesure f-invariante ergodique d'entropie $h_\mu(f) > 0$ telle que* $(\operatorname{supp}\mu, f)$ *soit uniformément hyperbolique alors pour tout $q \leq 0$ on a*

$$\alpha(\mu, q) = \dim_H \mu - q\left(\frac{1}{\lambda_\mu^u} - \frac{1}{\lambda_\mu^s}\right) = \left(1 - \frac{q}{h_\mu(f)}\right)\dim_H \mu.$$

La restriction $q \leq 0$ dans ce corollaire provient de l'infimum qui n'est pas maîtrisé dans l'équation (4) définissant la dimension ponctuelle.

Dans [**16**], nous avons travaillé sur des espaces ultra-métriques pour lesquels on peut s'affranchir de l'infimum. Soit (X, f) un sous-shift bilatéral faiblement spécifié (par exemple de type fini ou sofic). Etant donné deux fonctions continues u et v, telles que $u(x) = u(y)$ lorsque $[x]_0^\infty = [y]_0^\infty$ et $v(x) = v(y)$ lorsque $[x]_{-\infty}^0 = [y]_{-\infty}^0$, on définit une métrique sur X par

$$d(x, y) \overset{\text{def}}{=} \max(\mathrm{e}^{-u([x]_0^n)}, \mathrm{e}^{-v([x]_m^0)}) \tag{5}$$

si m et n sont les plus grands entiers tels que $[x]_m^n = [y]_m^n$, où

$$u([x]_0^n) = \sup_{k \leq n} \sup_{z \in [x]_0^k} (u(z) + \cdots + u(f^{k-1}z)),$$
$$u([x]_m^0) = \sup_{k \leq m} \sup_{z \in [x]_k^0} (v(z) + \cdots + v(f^{-k+1}z)).$$

Les nombres $\mathrm{e}^{u(x)}$ et $\mathrm{e}^{v(x)}$ mesurent respectivement les taux de dilatation et de contraction de f, et si μ est une mesure invariante il est alors naturel d'appeler

$$\lambda_\mu^u = \int u d\mu \quad \text{et} \quad \lambda_\mu^s = \int v d\mu$$

les exposants de Lyapunov de (X, f, μ), bien que X ne soit pas une variété.

Théorème 48 ([**16**]). *Soit (X, f) un sous-shift bilatéral muni de la métrique définie par l'équation* (5)*, et μ une mesure ergodique d'entropie non nulle. Pour tout $q \in \mathbb{R}$ et μ-presque tout x on a*

$$d_{\mu,q}(x) = (h_\mu(f) - q)\left(\frac{1}{\lambda_\mu^u} - \frac{1}{\lambda_\mu^s}\right) = \alpha(\mu, q).$$

Soit maintenant $\varphi\colon X \to (0, \infty)$ une fonction Lipschitz continue. Le flot spécial sous φ est défini sur

$$X^\varphi \overset{\text{def}}{=} \{\bar{x} = (x, t)\colon x \in X, 0 \leq t \leq \varphi(x)\},$$

où l'on identifie les points $(x, \varphi(x))$ et $(0, fx)$ pour tout x, par l'équation

$$\Phi_s(x,t) = \begin{cases} (x, t+s) & \text{si } t+s < \varphi(x) \\ (fx, t+s-\varphi(x)) & \text{si } t+s \geq \varphi(x). \end{cases}$$

On munit alors X^φ de la distance de Bowen-Walters [**BoWa72**] [2].

Le temps de retour pour un flot (X^φ, Φ) sera défini de la façon suivante. Tout d'abord, définissons le temps de sortie d'un ensemble $U \subset X^\varphi$ par

$$\mathrm{e}(\bar{x}, U) = \inf\{t > 0 \colon \Phi_t \bar{x} \notin U\},$$

puis

$$\tau(\bar{x}, U) = \inf\{t > \mathrm{e}(\bar{x}, U) \colon \Phi_t \bar{x} \in U\} \quad \text{et} \quad \tau(U) = \inf_{\bar{x} \in U} \tau(\bar{x}, U).$$

On définit ensuite la dimension de récurrence des ensembles et des mesures invariantes par le flot comme pour les applications.

THÉORÈME 49 ([**16**]). *Soit $\bar{\mu}$ une mesure invariante par le flot spécial (X^φ, Φ), ergodique et d'entropie non nulle. Pour tout $q \in \mathbb{R}$ et $\bar{\mu}$-presque tout $\bar{x}$ on a*

$$d_{\bar{\mu},q}(\bar{x}) = \alpha(\bar{\mu}, q) = 1 + (h_{\bar{\mu}}(\Phi) - q)\left(\frac{1}{\chi^u_{\bar{\mu}}} - \frac{1}{\chi^s_{\bar{\mu}}}\right)$$

où $\chi^u_{\bar{\mu}}$ et $\chi^s_{\bar{\mu}}$ représentent les « exposants de Lyapunov » du flot [3].

---

[2] Une définition de cette distance se trouve aussi dans les articles [**16, 10**], dans l'annexe A de ce mémoire.

[3] On renvoie à l'article original pour leur définition.

Travaux de l'auteur

[1] (avec C. Liverani et S. Vaienti) *Conformal measure and decay of correlations for piecewise monotonic transformations*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **18** (1998) 1399–1420

[2] (avec C. Liverani et S. Vaienti) *A probabilistic approach to intermittency*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **19** (1999) 671–685

[3] (avec V. Penné et S. Vaienti) ***Dimensions for recurrence times : topological and dynamical properties***, Discrete and Continuous Dynamical Systems **5** (1999) 783–798

[4] (avec V. Penné et S. Vaienti) *Fractal and statistical characteristics of recurrence times*, Journal de Physique (Paris, 1998), compte rendu de la conférence "Disorder and chaos" (Rome) en l'honneur de Giovanni Paladin.

[5] (avec M. Hirata et S. Vaienti) ***Statistics of return times : a general framework and new applications***, Communications in Mathematical Physics **206** (1999) 33–55

[6] *Absolutely continuous invariant measures for multidimensional expanding maps*, Israel Journal of Mathematics **116** (2000) 223–248

[7] (avec L. Barreira) *Multifractal analysis of hyperbolic flows*, Communications in Mathematical Physics **214** (2000) 339–371

[8] (avec L. Barreira) *Variational principles and mixed multifractal spectra*, Transactions of the American Mathematical Society **353** (2001) 3919–3944

[9] ***On fluctuations and the exponential statistics of return times***, Nonlinearity **14** (2001) 179–191

[10] (avec L. Barreira) ***Hausdorff dimension of measures via Poincaré recurrence***, Communications in Mathematical Physics **219** (2001) 443–463

[11] (avec L. Barreira et J. Schmeling) *Higher dimensional multifractal analysis*, Journal de Mathématiques pures et appliquées **81** (2002) 67–91

[12] (avec L. Barreira) ***Product structure of Poincaré recurrence***, Ergodic Theory and Dynamical Systems **22** (2002) 33–61

[13] (avec S.Troubetzkoy et S.Vaienti) ***Recurrence, dimensions and Lyapunov exponents***, Journal of Statistical Physics **106** (2002) 623–634

[14] (avec H. Bruin, S. Troubetzkoy et S. Vaienti) ***Statistics of return time via inducing***, Ergodic Theory and Dynamical Systems **23** (2003) 991–1013

[15] (avec V. Afraimovich et J.-R. Chazottes) *Local dimension for Poincaré recurrence*, Electronic Research Announcement of the American Mathematical Society **6** (2000), 64–74. *Annonce de l'article* [**16**].

[16] (avec V. Afraimovich et J.-R. Chazottes) ***Pointwise dimensions for Poincaré recurrence associated with maps and special flows***, Discrete and Continuous Dynamical Systems A **9** (2003) 263–280

[17] (avec J.-R. Chazottes) ***On pointwise dimensions and spectra of measures***, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris - Série I Mathématiques **333** (2001) 719–723

[18] (avec L. Barreira) *Variational principles for hyperbolic flows*, Fields Institute Communications **31** (2002) 43–63

[19] (avec J.F. Alves et V. Araújo) *On the uniform hyperbolicity of certain hyperbolic systems*, Proceedings of the American Mathematical Society **131** (2003) 1303–1309

[20] (avec L. Barreira et J. Schmeling) *Distribution of frequencies of digits via multifractal analysis*, Journal of Number Theory **97** (2002) 413–442

[21] (avec S. Vaienti et S. Troubetzkoy) ***Recurrence and Lyapunov exponents***, Moscow Mathematical Journal **3** (2003) 189–203

[22] (avec A.-H. Fan et J. Schmeling) *Products of non-stationary random matrices and Multiperiodic equations of several scaling factors*, Pacific Journal of Mathematics, à paraître

[23] (avec J. Wu) ***Recurrence spectrum in smooth dynamical system***, Nonlinearity **16** (2003) 1991–2001

Bibliographie

[AbGa02] M. Abadi et A. Galves, *Inequalities for the occurrence times of rare events in mixing processes. The state of art*, Markov Process. Related Fields **7** (2001) 97–112

[Af97] Afraimovich, *Pesin's dimension for Poincaré recurrences*, Chaos **7** (1997) 12–20

[AfScUgUr00] V. Afraimovich, J. Schmeling, E. Ugalde, J. Urias, *Spectra of dimensions for Poincaré recurrences*, Discrete and Continuous Dynamical Systems **6** (2000) 901–914

[BaPeSc95] L. Barreira, Ya. Pesin et J. Schmeling, *Dimension and product structure of hyperbolic measures*, Ann. of Math. **149** (1999) 755–783

[Bi31] G. Birkhoff, *Proof of the ergodic theorem*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **17** 650-655

[Bo93] M. Boshernitzan, *Quantitative recurrence results*, Invent. Math. **113** (1993) 617–631

[BoWa72] R. Bowen et P. Walters, *Expansive one-parameter flows*, J. Differential Equations **12** (1972) 180–193

[Bo75] R. Bowen, « Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms ». Lecture Notes in Mathematics, Vol. 470. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975

[Bo78] R. Bowen, *Markov partitions are not smooth*, Proc. Amer. Math. Soc. **71** (1978) 130–132

[BrZw01] X. Bressaud et R. Zweimuller, *Non exponential law of entrance times in asymptotically rare events for intermittent maps with infinite invariant measure*, Annales Henri Poincaré **2** (2001) 1–12

[Br83] A. Brudno, *Entropy and the complexity of the trajectories of a dynamical system*, Russ. Math. Surv. **2** (1983) 127–151

[BrVa03] H. Bruin, S. Vaienti, *Return time statistics for unimodal maps*, Fund. Math. **176** (2003), 77–94

[Co01] P. Collet, *Statistics of closest return for some non-uniformly hyperbolic systems*, Ergodic Theory Dynam. Systems **21** (2001) 401–420

[CoGaSc92] P. Collet, A. Galves et B. Schmitt, *Unpredictability of the occurrence time of a long laminar period in a model of temporal intermittency*, Ann. Inst. H. Poincaré, Section A **57** (1992) 319–331

[CoGaSs99] P. Collet, A. Galves et B. Schmitt, *Repetition time for gibsiann source*, Nonlinearity **12** (1999) 1225–1237

[Do40] W. Döblin, *Remarques sur la théorie métrique des fractions continues*, *Compositio Math.* **7** (1940) 353–371

[DuMa03] F. Durand et A. Maass, *A note on limit laws for minimal Cantor systems*, Discrete and Continuous Dynamical Systems **9** (2003) 745–750

[FeWu01] D.J. Feng et J. Wu, *The Hausdorff dimension of recurrent set in symbolic spaces*, Nonlinearity **14** (2001) 81–85

[FeUgUr02] B. Fernandez, E. Ugalde et J. Urias, *Spectrum of dimensions for Poincaré recurrences of Markov maps*, Discrete and Continuous Dynamical Systems A **8** (2002) 835–849

[Fu81] H. Furstenberg, « Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory », Princeton NJ : Princeton University Press, 1981

[Ha00] N. Haydn, *Statistical properties of equilibrium states for rational maps*, Ergodic Theory Dynam. Systems **20** (2000) 1371–1390

[HaLuMaVa01] N. Haydn, J. Luevano, G. Mantica et S. Vaienti, *Multifractal properties of return time statistics*, Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 224502

[Hi93] M. Hirata, *Poisson law for Axiom A diffeomorphism*, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **13** (1993) 533–556

[Hi95] M. Hirata, *Poisson law for the dynamical systems with the "self-mixing" conditions*. In : Dynamical systems and chaos, Vol. 1 (Hachioji, 1994) (River Edge, NJ), River Edge, NJ : World Sci. Publishing (1995) 87–96

[Ho95] F. Hofbauer, *Local dimension for piecewise monotonic maps of the interval*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **15** (1995) 1119–1142

[HoRa92] F. Hofbauer et P. Raith, *The Hausdorff dimension of an ergodic invariant measure for a piecewise monotonic map of the interval*, Canad. Math. Bull. **35** (1992) 84–98

[Ka47] M. Kac, *On the notion of recurrence in discrete stochastic processes*, Bull. A.M.S. **53** (1947) 1002–1010

[KaHa95] A. Katok et B. Hasselblatt, « Introduction to the modern theory of dynamical systems », Encyclopedia of Mathematics and its Application, vol. 54,Cambridge University Press, Cambridge, 1995

[KaStLePr86] A. Katok, J.M. Strelcyn, F. Ledrappier et F. Przytycki, « Invariant manifolds, entropy and billiards ; smooth maps with singularities », Lectures notes in Mathematics, vol. 1222, Springer-Verlag, Berlin, 1986

[Ke98] G. Keller, « Equilibrium states in ergodic theory », London Mathematical Society Student Texts, vol. 42. Cambridge University Press, Cambridge, 1998

[La02] Y. Lacroix, *Possible limit laws for entrance times of an ergodic aperiodic dynamical system*, Israel J. Math. **132** (2002) 253–264

[LeYo85] F. Ledrappier et L.S. Young, *The metric entropy of isms. art II : Relations between entropy, exponents and dimension*, Ann. of Math. **122** (1985) 540–574

[OrWe93] D. Ornstein et B. Weiss, *Entropy and data compression schemes*, IEEE Trans. Inform. Theory **39** 78–83

[Os68] V. Oseledets, *A multiplicative ergodic theorem. Liapunov characteristic numbers for dynamical systems*, Trudy Moskovskogo Matemati. ceskogo Ob. s. cestva **19** (1968) 179–210 ; Transactions of the Moscow Mathematical Society **19** (1968) 197–221

[Pa00] F. Paccaut, *Statistics of return times for weighted maps of the interval*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **36** (2000) 339–366

[Pa81] W. Parry, « Topics in ergodic theory », Cambridge University Press, Cambridge, 1981

[Pe99] Ya.B. Pesin, « Dimension theory in dynamical systems », Chicago Lectures in Mathematics, 1997

[Pi91] B. Pitskel, *Poisson law for Markov chains*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **11** (1991) 501–513

[Qu98] A. Quas, *An entropy estimator for a class of infinite alphabet processes*, Theor. Veroyatnost. i Primenen. **43** (1998) 61–621

[Ru78] D. Ruelle, « Thermodynamic formalism, The mathematical structure of classical equilibrium statistical mechanics », Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 5. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, MA, 1978

[Ru78] D. Ruelle, *An inequality for the entropy of differentiable maps*, Bol. Soc. Brasil Mat. **9** (1978) 83–87

[Ru79] D. Ruelle, *Ergodic theory of differentiable dynamical systems*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **50** (1979) 27–58

[Se72] B. A. Sevast'yanov, *Poisson limit law for a scheme of sums of independent random variables*, Th. Prob. Appl. **17** (1972) 695–699

[Wh91] H. White, *On the algorithmic complexity of trajectories of points in dynamical systems*, Ph. D. dissertation Univ. North California at Chapel Hill, 1991

[Wh93] H. White, Algorithmic complexity of points in a dynamical system, Ergodic Theory and Dynamical Systems **13** (1993) 807–830

[Yo82] L.S. Young, *Dimension, Entropy and Lyapunov exponents*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **2** (1982) 109–124

[Yo99] L.S. Young, *Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity*, Ann. Math. **147** (1998) 585–650

[Za00] Z. Coelho, *Asymptotic laws for symbolic dynamical systems*, Topics in Dynamical systems and Applications (LMS Lecture Notes, 279). Eds F. Blanchard, A. Maass and A. Nogueira. Cambridge University Press (2000) 123–165

ANNEXE A

Texte intégral des publications relatives au mémoire

- *Dimensions for recurrence times : topological and dynamical properties* [**3**]
- *Statistics of return times : a general framework and new applications* [**5**]
- *On fluctuations and the exponential statistics of return times* [**9**]
- *Hausdorff dimension of measures via Poincaré recurrence* [**10**]
- *Product structure of Poincaré recurrence* [**12**]
- *Recurrence, dimensions and Lyapunov exponents* [**13**]
- *Statistics of return time via inducing* [**14**]
- *Pointwise dimensions for Poincaré recurrence associated with maps and special flows* [**16**]
- *On pointwise dimensions and spectra of measures* [**17**]
- *Recurrence and Lyapunov exponents* [**21**]
- *Recurrence spectrum in smooth dynamical system* [**23**].