

Formalisme thermodynamique, analyse multifractale et récurrence de Poincaré dans les systèmes dynamiques hyperboliques

Cours master 2 - 2010

Benoît Saussol

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES UMR 6205

UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE, BREST

`benoit.saussol@univ-brest.fr`

`http ://www.math.univ-brest.fr/perso/benoit.saussol`

RÉSUMÉ. Formalisme thermodynamique des systèmes dynamiques. Après une courte introduction empruntée à l'incontournable *Lecture Note* de Bowen, motivée par la physique statistique, on démontrera le principe variationnel. On établira ensuite l'existence des états d'équilibres en dynamique symbolique pour les potentiels réguliers, grâce au Théorème de Ruelle-Perron-Frobenius. Ce cadre plus général permettra en même temps d'obtenir plusieurs propriétés : régularité de la pression, mélange exponentiel, Théorème-limite central.

L'analyse multifractale. On commencera par une introduction à la théorie de la dimension, pour l'appliquer ensuite à l'analyse multifractale dans un cadre symbolique, puis en dimension 1 ou 1+1. Certaines quantités locales, comme l'entropie locale d'une mesure invariante, la dimension locale d'une mesure invariante, l'exposant de Lyapunov ou plus généralement les moyennes ergodiques des fonctions ont des variations très brutales (e.g. chaque ensemble de niveau est un ensemble indénombrable et dense). Une façon d'étudier leur distribution est de calculer la dimension des ensembles de niveau. Ceci peut être très élégamment décrit grâce au formalisme thermodynamique.

Récurrence de Poincaré. A quelle vitesse se rapproche-t-on du point de départ ? la réponse sera donnée en terme d'entropie dans le cas symbolique ou sinon de dimension, et donne un procédé simplissime pour calculer ces quantités. Ensuite au tour de la distribution des temps de retour dans les petits ensembles. Je montrerai la convergence en loi vers des exponentielle. Ce dernier résultat, outre son intérêt intrinsèque, permet de caractériser les fluctuations autour de la limite dans les vitesses de récurrence.

Formalisme thermodynamique

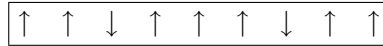
1. Distribution de Gibbs et états d'équilibre

1.1. La distribution de Gibbs dans un modèle "physique". Le but est de donner un modèle physique simple qui permette de donner un sens aux mots pression, entropie, états d'équilibre pour un système dynamique.

1.1.1. *La description statique du modèle.* L'exemple type que l'on peut considérer est le suivant : fixons plusieurs boussoles dans une boîte. Elles voudraient toutes indiquer le nord comme ceci :



mais comme chaque boussole est elle-même un petit aimant, elles doivent se repousser entre elles, donc la position d'équilibre devrait plutôt ressembler à cela :



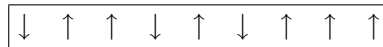
Soit un système fini de n cellules identiques en interactions. Chacune pouvant être dans un nombre k d'états différents. L'ensemble des états possible sera noté $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, k\}$. L'état du système total est décrit par \mathcal{A}^n . On note $a_i \in \mathcal{A}$ l'état de la i ème cellule.

On supposera que l'énergie du système a deux origines :

- Une cellule dans un état $a \in \mathcal{A}$ a une énergie propre $e(a)$.
- L'énergie (potentielle) de l'interaction entre deux cellules différentes i et j dépend de leur position et de leur états respectifs a_i et a_j , et est donnée par une fonction $\phi_{i,j}(a_i, a_j) + \phi_{j,i}(a_j, a_i)$. On a $\phi_{i,j} = \phi_{j,i}$ par le principe d'action-réaction.

Si le système se trouve dans un état $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ on peut associer à la i ème cellule une énergie $\phi_i(\bar{a}) = e(a_i) + \sum_{j \neq i} \phi_{i,j}(a_i, a_j)$ (ceci permet de répartir équitablement l'énergie potentielle entre les deux cellules en interaction). Pour unifier l'écriture on posera $\phi_{i,i}(a, a) = e(a)$, d'où $\phi_i(\bar{a}) = \sum_j \phi_{i,j}(a_i, a_j)$. L'énergie totale du système est donc $E(\bar{a}) = \sum_i \phi_i(\bar{a})$.

1.1.2. *Le système en équilibre statistique.* Supposons qu'un gaz (très chaud) baigne la boîte pleine de boussoles, quelle configuration vont-elles prendre ?



On considère maintenant ce système dans un état aléatoire suivant une loi μ . C'est-à-dire que la probabilité de trouver le système dans l'état \bar{a} est $\mu(\bar{a})$. Ceci permet de définir des quantités thermodynamiques

- l'entropie : $H(\mu) = - \sum_{\bar{a} \in \mathcal{A}^n} \mu(\bar{a}) \log \mu(\bar{a})$
- l'énergie : $E(\mu) = \sum_{\bar{a} \in \mathcal{A}^n} \mu(\bar{a}) E(\bar{a})$
- l'énergie libre à une température T : $F(\mu) = E(\mu) - TH(\mu)$

Rappelons un des principes de physique statistique. Un système soumis à la contrainte d'avoir une énergie constante (ce qui est le cas lorsqu'il est isolé, par exemple) tends à maximiser son entropie. Sans cette contrainte, il tends à minimiser son énergie libre. On note $\beta = \frac{1}{T}$ la température inverse (cela revient à prendre un système d'unité où la constante de Boltzmann k_B est égale à 1).

PROPOSITION 1. *Il y a un unique état d'équilibre pour le système (qui minimise son énergie libre). Il correspond à la distribution de Gibbs : $\mu_{Gibbs}(\bar{a}) = \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta E(\bar{a})}$, où $Z(\beta) = \sum_{\bar{a}} e^{-\beta E(\bar{a})}$ est une constante de normalisation, appelée la fonction de partition.*

Minimisons $F(\mu) = \sum_{\bar{a}} \mu(\bar{a})(E(\bar{a}) + T \log \mu(\bar{a}))$ sous la contrainte que μ soit une probabilité sur un ensemble fini. Le principe des extrema liés donne tout de suite un point critique si pour une certaine constante $\lambda \in \mathbb{R}$, $E(\bar{a}) + T(\log \mu(\bar{a}) + 1) = \lambda$, soit $\mu(\bar{a})$ proportionnel à $e^{-\beta E(\bar{a})}$.

Un matheux préférera sans doute appliquer le

LEMME 1. Soit $p_i \geq 0$ tels que $\sum_i p_i = 1$ et a_i des réels. On pose $A = \sum_i e^{a_i}$. Alors $\sum_i p_i(a_i - \log p_i) \leq \log A$ avec égalité ssi $p_i = e^{a_i}/A$.

DÉMONSTRATION. La fonction $\phi(x) = x \log x$ étant strictement convexe, en posant $\alpha_i = e^{a_i}/A$ et $x_i = p_i/\alpha_i$, on obtient

$$0 = 1 \log 1 \leq \sum_i \alpha_i x_i \log x_i = \sum_i p_i (\log p_i + \log A - a_i).$$

□

1.1.3. *Généralisation sur un réseau unidimensionnel.* Considérons maintenant une infinité de cellules disposées sur \mathbb{Z} :

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & a_{-3} & a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ \dots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \end{array}$$

L'espace d'état est maintenant représenté par $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Soit $\sigma: (a_i) \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \mapsto (a_{i+1}) \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ le shift. On suppose que l'interaction entre deux cellules i et j ne dépend que de leur distance relative $i - j$. On a donc $\phi_{i,j} = \phi_{0,j-i}$. Afin d'assurer que l'énergie de chaque cellule est finie, on supposera que l'interaction vérifie $\sum_j \sup_{a,a' \in \mathcal{A}} |\phi_{0,j}(a, a')| < \infty$. C'est bien sûr automatiquement vérifié lorsque l'interaction se limite aux plus proches voisins (modèle d'Ising) ou qu'elle décroît exponentiellement avec la distance.

Lorsque le système se trouve dans l'état \bar{a} , l'énergie de la i ème cellule vérifie alors $\phi_i(\bar{a}) = \phi_0(\sigma^i \bar{a})$. L'énergie totale contenue dans le segment $\Lambda = \{m, \dots, n\}$ est donnée par $\sum_{i=m}^n \phi_0(\sigma^i \bar{a})$. Remarquons que l'hypothèse de sommabilité de l'interaction implique que ϕ_0 est une fonction continue sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ muni de la topologie produit.

Une mesure de Gibbs à température (inverse) β sera maintenant une probabilité μ sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ muni de la tribu des boréliens telle que pour tout segment fini $\Lambda = \{m, \dots, n\}$, et pour tout état $\bar{a} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, en posant $[a_m, \dots, a_n] = \{a' \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}: a'_m = a_m, \dots, a'_n = a_n\}$, on ait $\mu([a_m, \dots, a_n])$ (à peu près) proportionnel à $\exp(-\beta \sum_{j=m}^n \phi_0(\sigma^j \bar{a}))$.

1.2. Correspondance en dynamique symbolique. On donne une alphabet fini \mathcal{A} et on considère le shift σ sur $\Sigma = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ (pour certaines raisons ce sera plus simple de travailler avec \mathbb{N} que \mathbb{Z}). Σ est encore muni de la topologie produit de la topologie discrète sur \mathcal{A} , qui est métrisable. On fixera la distance $d(\bar{a}, \bar{a}') = e^{-n}$ si n est le plus grand entier tel que $a_i = a'_i$ pour tout i tel que $i < n$. Σ est compact. On appellera (m, n) -cylindre contenant $\bar{a} \in \Sigma$ l'ensemble

$$[\bar{a}_m^n] = \{\bar{a}' \in \Sigma: a'_m = a_m, \dots, a'_n = a_n\}.$$

Remarquons que les boules sont des $(0, n)$ -cylindres.

Soit $\varphi: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue, que l'on appellera potentiel (pour la correspondance avec le paragraphe précédent on prendra $\varphi = -\beta \phi_0$). Un état du système physique précédent correspond à une orbite du système dynamique topologique (Σ, σ) . Le potentiel φ permet de pondérer les orbites du système dynamique, et cette fois les mesures de Gibbs vont sélectionner des orbites complexes (à cause de l'entropie) qui passent préférentiellement leur temps dans des pics du potentiel (qui correspondent aux creux du potentiel physique). On peut remarquer qu'une interaction physique exponentiellement décroissante donnera un potentiel Hölder, et qu'une interaction à portée finie donnera un potentiel ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées.

Pour un entier n donné et un point $\bar{a} \in \Sigma$ on pose $S_n \varphi(\bar{a}) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(\sigma^j \bar{a})$. On note \mathcal{C}_0^n l'ensemble des $(0, n-1)$ -cylindres. On les appellera les n -cylindres (car les n premières coordonnées sont prescrites).

On définit alors la fonction de partition $Z_\varphi(n) = \sum_{C \in \mathcal{C}_0^n} \max_C e^{S_n \varphi}$. Par sous-multiplicativité la limite de $\frac{1}{n} \log Z_\varphi(n)$ existe (exercice).

DÉFINITION 1. La pression du potentiel φ est définie par $P(\varphi; \Sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log Z_\varphi(n)$.

DÉFINITION 2. On appelle mesure de Gibbs sur (Σ, σ) pour le potentiel φ une mesure invariante μ telle qu'il existe une constante $p \in \mathbb{R}$ et $\kappa \geq 1$ pour laquelle on ait

$$\frac{1}{\kappa} \leq \frac{\mu(C)}{\exp(S_n \varphi(x) - np)} \leq \kappa$$

pour tout cylindre $C \in \mathcal{C}_0^n$ et $x \in C$.

Dans ce cas on a nécessairement $p = P(\varphi; \Sigma)$ (exercice). Sous des conditions assez générales les mesures de Gibbs existent et sont uniques. En dynamique symbolique l'entropie d'une mesure σ -invariante μ vaut $h_\mu(\sigma) = \lim_n -\frac{1}{n} \sum_{C \in \mathcal{C}_0^n} \mu(C) \log \mu(C)$ (pourquoi?).

PROPOSITION 2. Si μ est une mesure de Gibbs d'un potentiel φ alors $P(\varphi; \Sigma) = h_\mu + \int \varphi d\mu$.

DÉMONSTRATION. Le potentiel φ étant continu, pour tout cylindre C de taille n on a $\mu(C) \log \varphi(C) \approx \int_C S_n \varphi - nP(\varphi; \Sigma) d\mu$. D'où

$$h_\mu = \lim -\frac{1}{n} \sum_{|C|=n} \mu(C) \log \mu(C) = \lim -\frac{1}{n} \int S_n \varphi d\mu + P(\varphi)$$

et la conclusion suit de l'invariance de μ . □

2. Formalisme thermodynamique des systèmes dynamiques

On introduit le formalisme thermodynamique pour les systèmes dynamiques en général. On supposera que (X, f, μ) est un système dynamique avec X compact métrique, f une application continue et μ une mesure de probabilité, de Borel, invariante par f .

2.1. L'entropie.

DÉFINITION 3. On appelle entropie d'une partition finie ou dénombrable ξ de X la quantité

$$H_\mu(\xi) = - \sum_{C \in \xi} \mu(C) \log \mu(C).$$

Si ξ et η sont deux partitions alors on pose $\xi \vee \eta = \{C \cap D : C \in \xi, D \in \eta\}$.

LEMME 2. (i) L'entropie vérifie $H_\mu(\xi \vee \eta) \leq H_\mu(\xi) + H_\mu(\eta)$.

(ii) Si ν est une autre mesure et $\lambda \in [0, 1]$ alors $\lambda H_\mu(\xi) + (1 - \lambda) H_\nu(\xi) \leq H_{\lambda\mu + (1-\lambda)\nu}(\xi)$.

DÉMONSTRATION. Pour (i), introduire les mesures conditionnelles μ_C et sommer les deux morceaux dans un ordre différent en utilisant la concavité de $\phi(x) = -x \log x$. Pour (ii), concavité de ϕ . □

DÉFINITION 4. L'entropie métrique de f relativement à la partition ξ est définie par

$$h_\mu(f, \xi) = \lim \frac{1}{n} H_\mu(\xi \vee f^{-1}\xi \vee \dots \vee f^{-n+1}\xi).$$

L'entropie du système (f, μ) est définie par $h_\mu(f) = \sup_\xi h_\mu(f, \xi)$ où le supremum est pris sur toutes les partitions ξ finies (ou dénombrables et d'entropie $H_\mu(\xi)$ finies).

C'est un invariant métrique.

Exemple. Calculer l'entropie d'une mesure de Markov P .

THÉORÈME 3 (Shannon - Mc Millan - Breiman). Soit ξ une partition mesurable finie ou dénombrable d'entropie $H_\mu(\xi) < \infty$. la quantité $-\frac{1}{n} \log \mu(\xi_0^n(x))$ converge μ -presque partout et dans L^1 . Si μ est ergodique alors la limite est l'entropie $h_\mu(f, \xi)$.

COROLLAIRE 1. Supposons (X, f, μ) ergodique. Soit $h = h_\mu(f, \xi)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble mesurable A tel que $\mu(A) > 1 - \varepsilon$ et il existe un entier N tel que

$$\forall x \in A, \forall n \geq N, \quad e^{-n(h+\varepsilon)} \leq \mu(\xi_0^n(x)) \leq e^{-n(h-\varepsilon)}.$$

Il y a donc à peu près e^{nh} cylindres de longueur n , tous à peu près équiprobables.

DÉMONSTRATION. On donne la preuve d'Ornstein et Weiss, dans le cas où la partition ξ est finie et la mesure est ergodique. Posons $I_n(x) = -\log \mu(\xi_0^n(x))$.

(1) la suite de fonctions $\frac{1}{n}I_n$ est uniformément intégrable, i.e. $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\{\frac{1}{n}I_n > t\}} \frac{1}{n}I_n d\mu = 0$ uniformément en n .

(2) Si $\frac{1}{n}I_n \rightarrow h$ presque partout alors $h = h_\mu(f, \xi)$

(3) $\liminf \frac{1}{n}I_n$ est sous-invariante donc constante, soit h .

(4) $\mu(\xi_0^n(x)) \leq e^{-n(h-\varepsilon)}$ facile

(5) méthode des passages fréquents dans les bons ensembles. \square

L'interprétation donnée par le corollaire, en nombre d'orbites du système, nous amène à la notion d'entropie topologique.

On dit qu'un ensemble $E \subset X$ est (n, ε) -séparé si pour tous $x \neq y \in E$, $d(f^k x, f^k y) < \varepsilon$ pour tout $j = 0, 1, \dots, n$ est impossible. Autrement dit un ensemble est (n, ε) -séparé si deux orbites de longueur n issues de E paraissent différentes même à une précision ε .

DÉFINITION 5. On appelle entropie topologique le nombre

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sup_{E \text{ } (n, \varepsilon)\text{-séparé}} \text{card } E.$$

Remarquons qu'avec la limite inférieure on obtient la même quantité. C'est un invariant topologique.

THÉORÈME 4 (Principe variationnel pour l'entropie). $h_{\text{top}}(f) = \sup\{h_\mu(f) : \mu \text{ invariante}\}$.

La démonstration sera donnée dans le cadre plus général de la pression.

2.2. Principe variationnel pour la pression. Soit $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue : le potentiel.

DÉFINITION 6. On appelle pression topologique de φ par rapport à f

$$P_f(\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sup_E \sum_{x \in E} \exp S_n \varphi(x).$$

où le sup est pris sur tous les ensembles E qui sont (n, ε) -séparés et $S_n \varphi(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j x)$.

Remarquons que sans perte de généralités on peut supposer le supremum pris sur les ensembles (n, ε) -séparés maximaux. En effet, l'adjonction d'un point à un ensemble (n, ε) -séparé non maximal est toujours possible, et ne fait qu'augmenter la somme.

THÉORÈME 5 (Principe variationnel). Soit $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors

$$P_f(\varphi) = \sup\{h_\mu + \int \varphi d\mu : \mu \text{ invariante}\}.$$

La preuve du principe variationnel repose sur deux inégalités que l'on montre séparément.

LEMME 3. Pour chaque entier n soit $E_n \subset X$ un ensemble (n, ε) -séparé. On définit une mesure de probabilité par $\nu_n = \frac{1}{Z_n} \sum_{x \in E_n} e^{S_n \varphi(x)} \delta_x$, où Z_n est la constante de normalisation, puis $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f_*^i \nu_n$ où $f_* \nu(A) = \nu(f^{-1}A)$. Alors tout point d'accumulation μ de (μ_n) (et il en existe) est une mesure invariante qui vérifie

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log Z_n \leq h_\mu + \int \varphi d\mu.$$

DÉMONSTRATION. L'existence du point d'accumulation provient de la faible* compacité des mesures de probabilité. L'invariance de μ s'obtient en passant à la limite dans l'égalité $f_*\mu_n - \mu_n = \frac{1}{n}(f_*^n\nu_n - \nu_n)$.

Soit ξ une partition mesurable finie en éléments de diamètre inférieur à ε telle que $\mu(\partial\xi) = 0$ (exercice : $\exists r \in (\varepsilon/2, \varepsilon)$ tel que $\mu(\partial B(x, r)) = 0$)

$$\begin{aligned} H_{\nu_n}(\xi_n) + n \int \varphi d\mu_n &= - \sum_{C \in \xi_n} \nu_n(C) \log \nu_n(C) + \int S_n \varphi d\nu_n \\ &= \sum_{x \in E_n} \nu_n(\{x\}) [-\log \nu_n(\{x\}) + S_n \varphi(x)] \\ &= \sum_{x \in E_n} \nu_n(\{x\}) \log Z_n = \log Z_n. \end{aligned}$$

Soit q un entier (petit par rapport à n). Pour tout $0 \leq k < q$, on partitionne $\{0, \dots, n-1\}$ en blocs de longueur k, q, q, \dots, q, b avec $b < q$. On peut donc récrire $\xi_n = \xi_k \vee f^{-k}\xi_q \vee \dots \vee f^{-k-aq}\xi_q \vee f^{-k-(a+1)q}\xi_b$ selon ce schéma, où $a = a(k)$. Par conséquent le (i) du lemme sur l'entropie des partitions donne

$$\begin{aligned} H_{\nu_n}(\xi_n) &\leq H_{\nu_n}(\xi_k) + H_{\nu_n}(f^{-k}\xi_q) + \dots + H_{\nu_n}(f^{-k-aq}\xi_q) + H_{\nu_n}(f^{-k-aq-q}\xi_b) \\ &\leq H_{f_*^k\nu_n}(\xi_q) + H_{f_*^{k+q}\nu_n}(\xi_q) + \dots + H_{f_*^{k+aq}\nu_n}(\xi_q) + 2q \log \text{card } \xi. \end{aligned}$$

En sommant sur k puis en utilisant le (ii) du lemme sur l'entropie des partitions, il vient

$$\frac{q}{n} H_{\nu_n}(\xi_n) = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{n} H_{\nu_n}(\xi_n) \leq \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{n} H_{f_*^\ell\nu_n}(\xi_q) + \frac{q^2}{n} \log \text{card } \xi \leq H_{\mu_n}(\xi_q) + \frac{q^2}{n} \log \text{card } \xi.$$

En combinant ces estimations on trouve

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log Z_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{q} H_{\mu_n}(\xi_q) + \int \varphi d\mu_n \right) = \frac{1}{q} H_{\mu}(\xi_q) + \int \varphi d\mu.$$

La dernière égalité étant valide du fait que $\mu(\partial\xi) = 0$. En passant à la limite quand $q \rightarrow \infty$ il vient

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log Z_n \leq h_{\mu}(f, \xi) + \int \varphi d\mu \leq h_{\mu}(f) + \int \varphi d\mu.$$

□

Etant donnée deux partitions ξ et η , on définit l'entropie conditionnelle $H(\xi|\eta) = \sum_{D \in \eta} \mu(D) H_{\mu_D}(\xi)$.

LEMME 4. *L'entropie conditionnelle vérifie*

- (i) $H(\xi|\eta) = H(\xi \vee \eta) - H(\eta)$
- (ii) $H(\xi) \leq H(\eta) + H(\xi|\eta)$
- (iii) $H(\xi \vee \eta|\pi) = H(\xi|\pi) + H(\eta|\xi \vee \pi)$
- (iv) $H(\xi|\eta \vee \pi) \leq H(\xi|\eta)$.

DÉMONSTRATION. (i) s'obtient par un simple calcul; (ii) et (iii) sont des conséquences immédiates de (i); (iv) s'obtient en intégrant l'inégalité (ii) du lemme de l'entropie

$$\sum_{D \in \eta} \mu(D) \sum_{E \in \pi} \mu_D(E) H_{\mu_{D \cap E}}(\xi) \leq \sum_{D \in \eta} \mu(D) H_{\mu_D}(\xi).$$

□

LEMME 5. *Pour toute mesure invariante μ et toute partition ξ on a*

$$h_{\mu}(f, \xi) + \int \varphi d\mu \leq 2 + \log 2 + P_f(\varphi).$$

DÉMONSTRATION. Soit μ une mesure invariante et $\xi = \{C_1, \dots, C_k\}$ une partition mesurable de X . La mesure étant régulière, la mesure des C_i peut être approchée par celle de compacts B_i . On prends tels que si $\eta = \{B_0, B_1, \dots, B_k\}$ avec $B_0 = X \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_k)$ alors $H(\xi|\eta) < 1$ (utiliser (i)). On a donc $h_\mu(f, \xi) \leq h_\mu(f, \eta) + H_\mu(\xi|\eta) \leq h_\mu(f, \eta) + 1$: en effet, par (ii) $H(\xi_n) \leq H(\eta_n) + H(\xi_n|\eta_n)$ et par (iii) $H(\xi_n|\eta_n) \leq \sum_j H(f^{-j}\xi|\eta_n) \leq nH(\xi|\eta)$. Soit d la distance minimale entre deux ensembles $B_i, i \geq 1$, et $\delta \in (0, d/2)$ tel que $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq 1$ dès que $d(x, y) < \delta$. Pour $C \in \eta_n$ il existe $x_C \in \bar{C}$ tel que $S_n\varphi(x_C)$ réalise le supremum.

Soit E un ensemble (n, δ) -séparé que l'on supposera maximal, de sorte que E soit un (n, δ) -recouvrement. Il existe donc $y_C \in E$ dont l'orbite est δ -proche de x_C pendant n itérations, ce qui implique $|S_n\varphi(x_C) - S_n\varphi(y_C)| \leq n$. Puisque $\delta < d/2$ on a aussi que 2^n cylindres au plus partagent le même y_C (car tous les $f^i x_C$ doivent être dans B_0 ou dans le même B_j). Par le lemme 1, on obtient alors

$$\begin{aligned} H_\mu(\eta_n) + \int S_n\varphi d\mu &\leq \sum_{C \in \eta_n} \mu(C)(-\log \mu(C) + S_n\varphi(x_C)) \\ &\leq \log \sum_{C \in \eta_n} e^{S_n\varphi(x_C)} \\ &\leq \log \sum_{C \in \eta_n} e^{S_n\varphi(y_C) + n} \\ &\leq n + \log \left(2^n \sum_{y \in E} e^{S_n\varphi(y)} \right). \end{aligned}$$

Donc par invariance de μ ,

$$\frac{1}{n} H_\mu(\eta_n) + \int \varphi d\mu \leq 1 + \log 2 + \frac{1}{n} \log \sum_{y \in E} e^{S_n\varphi(y)}.$$

Le supremum sur E , suivi d'un passage à la limite en $n \rightarrow \infty$ puis $\delta \rightarrow 0$ donne

$$h_\mu(f, \xi) + \int \varphi d\mu \leq h_\mu(f, \eta) + 1 \leq 2 + \log 2 + P_f(\varphi).$$

□

PREUVE DU PRINCIPE VARIATIONNEL. Le premier lemme donne $P_f(\varphi) \leq \sup_\mu h_\mu(f) + \int \varphi d\mu$.

Le second appliqué à f^m avec le potentiel $S_m\varphi$, en remarquant que $P_{f^m}(S_m\varphi) \leq mP_f(\varphi)$ donne la conclusion en passant à la limite lorsque $m \rightarrow \infty$. □

Exercice : Soit $P = (P_{ij})_{i,j=1,\dots,k}$ une matrice stochastique. $P1 = 1$. Soit π v.p. à gauche. Soit $X = \{1, \dots, k\}^{\mathbb{N}}$, σ le shift. Posons $\mu([a_0 a_1 \dots a_n]) := \pi_{a_0} P_{a_0 a_1} \dots P_{a_{n-1} a_n}$. Ceci définit une mesure μ sur X . Elle est invariante par σ , de Gibbs, et c'est un état d'équilibre.

3. Théorème de Ruelle-Perron-Frobenius

Ce qui suit reste en grande partie valable dans le cadre des systèmes dynamiques expansifs avec la propriété de spécification. Pour permettre des preuves plus rapides, on se placera dans un cadre légèrement plus restrictif, les sous-shifts de type fini topologiquement mélangeant. On a donc un alphabet \mathcal{A} fini, une matrice de transition A de 0 et de 1 telle que pour un entier N , A^N n'ait pas de 0 et $X = \Sigma_A = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : A_{x_i x_{i+1}} = 1 \forall i \in \mathbb{Z}\}$.

Différents exemples de représentation ou de façons d'arriver à un sous-shift de type fini : diagramme, matrice de transition, β transformation avec $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, etc.

3.1. Théorème de Ruelle-Perron-Frobenius. Soit $\Sigma_A = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} : A_{x_i x_{i+1}} = 1 \ \forall i \in \mathbb{N}\}$ le sous-shift de type fini unilatéral. Soit $\varphi_{\Sigma_A} \rightarrow \mathbb{R}$ que l'on supposera ℓ -Lispchitz (on peut supposer φ seulement Hölder, puis quitte à introduire une nouvelle distance $d_\alpha(x, y) = d(x, y)^\alpha$ on se ramène au cas Lispchitz). Par définition de la distance, il existe $\delta < 1$ tel que pour tout $a \in \mathcal{A}$, si ax et ay existent alors $d(ax, ay) \leq \delta d(x, y)$ (σ est localement dilatante, son inverse contractante).

L'opérateur de Ruelle-Perron-Frobenius est défini par

$$L_\varphi(f)(x) = \sum_{a \in \mathcal{A}, A_{ax_0}=1} e^{\varphi(ax)} f(ax).$$

L_φ agit sur les fonctions continues. C'est un opérateur borné sur l'espace des fonctions continues, ainsi que sur l'espace des fonctions Lispchitz (exercice). On peut l'itérer

$$L_\varphi^n f(x) = \sum_{\sigma^n y = x} e^{S_n \varphi(y)} f(y).$$

LEMME 6. *Il existe une mesure de probabilité ν et une constante $\lambda > 0$ telles que $L_\varphi^* \nu = \lambda \nu$.*

DÉMONSTRATION. Le dual L_φ^* agit sur les mesures. L'application définie sur le convexe compact $\mathcal{M}(X)$ des mesures de probabilité qui à m associe $T(m) = \frac{L_\varphi^* m}{L_\varphi^* m(1)}$ possède un point fixe par Schauder-Tychonoff. Ce point fixe ν vérifie, en posant $\lambda = L_\varphi^* \nu(1)$,

$$\int_X L_\varphi f d\nu = \int_X d(L_\varphi^*) \nu = \lambda \int_X f d\nu.$$

□

Soit $b > 0$ tel que $b \geq \delta \ell + \delta b$ et

$$\mathcal{C}_b = \{f \geq 0 : f(x) \leq f(y) e^{bd(x,y)} \text{ si } x_0 = y_0, \text{ et } \nu(f) = 1\}.$$

LEMME 7. *Il existe $c \in (0, 1)$ tel que si $f \in \mathcal{C}_b$ alors $c \leq \lambda^{-N} L_\varphi^N f$ et $f \leq c^{-1}$.*

DÉMONSTRATION. Soient x et z quelconques. Il existe y tel que $x_0 = y_0$ et $\sigma^N y = z$. Donc

$$L_\varphi^N f(z) \geq e^{S_N \varphi(y)} f(y) \geq (\inf e^{S_N \varphi}) e^{-b} f(x).$$

Ceci montre que $\inf L_\varphi^N f \geq \frac{e^b}{\inf e^{S_N \varphi}} \sup f$. La conclusion vient en remarquant que $\nu(f) = 1$ et $\nu(\lambda^{-N} L_\varphi^N f) = 1$. □

Remarquons que si $f \in \mathcal{C}_b$ alors $\log f$, et donc f sont Lipschitz. De plus

$$\|f\| := \|f\|_\infty + |f|_{\text{Lip}} \leq M,$$

pour une constante $M = c^{-1} \max(3, b + 1)$.

LEMME 8. *Il existe $h \in \mathcal{C}_b$ tel que $L_\varphi h = \lambda h$ et $h > 0$.*

DÉMONSTRATION. Par Ascoli-Arzelà \mathcal{C}_b est relativement compact dans l'ensemble des fonctions continues. Or il y est clairement fermé donc compact. De plus, il est convexe. Puisqu'en outre si $f \in \mathcal{C}_b$ et $x_0 = y_0$

$$L_\varphi f(x) = \sum_a e^{\varphi(ax)} f(ax) \leq \sum_a e^{\varphi(ax) - \varphi(ay)} e^{\varphi(ay)} f(ay) e^{bd(ax, ay)} \leq e^{[\delta \ell + \delta b]d(x, y)} L_\varphi f(y),$$

qui montre que $\lambda^{-1} L_\varphi(\mathcal{C}_b) \subset \mathcal{C}_b$, on peut appliquer Schauder Tychonoff et donc il existe un point fixe $h \in \mathcal{C}_b$ qui vérifie $L_\varphi h = \lambda h$. D'après le lemme 7, $h = \lambda^{-N} L_\varphi^N h \geq c > 0$. □

LEMME 9. *Il existe $\eta \in (0, 1)$ tel que pour tout $f \in \mathcal{C}_b$, $\lambda^{-N} L_\varphi^N f = \eta h + (1 - \eta) f'$ avec $f' \in \mathcal{C}_b$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\eta = c^2 < 1$. Soit $f \in \mathcal{C}_b$. Posons $g = \lambda^{-N} L_\varphi^N f$. On peut écrire $g = \eta h + (g - \eta h)$. Puisque $g - \eta h \geq c - \eta c^{-1} \geq 0$, $g \in \mathcal{C}_b$ et $h \in \mathcal{C}_b$ on a $g - \eta h \in \mathbb{R} \mathcal{C}_b$. □

LEMME 10. *Il existe des constantes $C > 0$ et $\theta \in (0, 1)$ telles que*

$$\|\lambda^{-n} L_\varphi^n f - h\| \leq C\theta^n$$

pour tout $f \in \mathcal{C}_b$ et $n \geq 0$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme Lipschitz.

DÉMONSTRATION. En itérant la relation du lemme 9, il vient que pour tout $p \geq 1$,

$$\lambda^{-pN} L_\varphi^{pN} f = (1 - (1 - \eta)^p)h + (1 - \eta)^p f_p$$

avec $f_p \in \mathcal{C}_b$. Ecrivons $n = pN + r$. On obtient

$$\|\lambda^{-n} L_\varphi^n f - h\| \leq \|\lambda^{-r} L_\varphi^r\| \|(1 - \eta)^p \|h + f_p\|.$$

La conclusion vient en posant $\theta = (1 - \eta)^{\frac{1}{N}}$ et $C = \sup_{r < N} \|\lambda^{-r} L_\varphi^r\| 2M/(1 - \eta)$. \square

THÉORÈME 6 (Ruelle-Perron-Frobenius). *Soit (Σ_A^+, σ) un sous-shift de type fini topologiquement mélangé et $\varphi: \Sigma_A^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une application Hölder. Alors il existe une valeur propre $\lambda > 0$, une fonction propre h Hölder avec $h > 0$ et une mesure de probabilité ν tels que*

(i) $L_\varphi h = \lambda h$

(ii) $L_\varphi^* \nu = \lambda \nu$

(iii) $\mu = h\nu$ est une mesure invariante

(iv) pour tout $\alpha > 0$ il existe $\theta_\alpha \in (0, 1)$ et $C_\alpha > 0$ tels que pour toute fonction α -Hölder f et tout entier n on ait

$$\|\lambda^{-n} L_\varphi^n f - h\|_\infty \leq C_\alpha \theta_\alpha^n.$$

et les corrélations décroissent exponentiellement pour tout $g \in L^1(\mu)$

$$\left| \int fg \circ \sigma^n d\mu - \int f d\mu \int g d\mu \right| \leq C_\alpha \theta_\alpha^n.$$

(v) la mesure μ est exponentiellement ψ -mélangeante : il existe une suite $\psi(k)$ convergant exponentiellement vite vers zéro telle que pour tous m -cylindre A et n cylindre B ,

$$|\mu(A \cap \sigma^{-m-k} B) - \mu(A)\mu(B)| \leq \psi(k)\mu(A)\mu(B).$$

DÉMONSTRATION. (i) est le lemme 8, (ii) le lemme 6

(iii)

$$\int_X f \circ \sigma d\mu = \int_X f \circ \sigma h d\nu = \int_X \lambda^{-1} L_\varphi(f \circ \sigma h) d\nu$$

et $L_\varphi(f \circ \sigma h) = f L_\varphi(h) = fh$.

(iv) Par un argument d'approximation par des fonctions dépendant d'un nombre fini de coordonnées, il suffit de raisonner sur les fonctions Lipschitz. Si f est Lipschitz alors $f + c \in \mathcal{C}_b$ dès que la constante c dépasse la constante Lipschitz de f et le premier point est obtenu par le lemme 10. De plus, on a

$$\int fg \circ \sigma^n h d\nu = \int L_\varphi^n(fh) g d\nu.$$

Puisque fh est Hölder, $\lambda^{-n} L_\varphi^n(fh)$ converge exponentiellement uniformément vite vers $\nu(fh)h = \mu(f)h$ ce qui démontre le second point.

(v) Si f est la fonction indicatrice d'un cylindre A de longueur n , alors $g = L_\varphi^n(fh/\mu(A)) \in \mathcal{C}_b$ pour b suffisamment grand (indépendant de n). On a donc

$$\begin{aligned} |\mu(A \cap \sigma^{-n-k} B) - \mu(A)\mu(B)| &= |\nu(1_B \lambda^{-k} L_\varphi^k \lambda^{-n} L_\varphi^n(fh)) - \nu(1_B h)\mu(A)| \\ &\leq \|\lambda^{-k} L_\varphi^k g - h\|_\infty \mu(A)\mu(B). \end{aligned}$$

D'après le lemme 10 c'est exponentiellement petit en k . \square

3.2. Propriété de Gibbs.

THÉORÈME 7. *La mesure μ ainsi construite est une mesure de Gibbs pour le potentiel φ et $P(\varphi) = \log \lambda$.*

DÉMONSTRATION. h étant bornée inférieurement et supérieurement, on peut raisonner sur ν . Soit $x \in \Sigma_A^+$ et n un entier. Soit $f(z) = 1_{C^n(x)}(z)$ la fonction indicatrice du cylindre de longueur n contenant x . On a

$$\nu(C^n(x)) = \nu(\lambda^{-n} L_\varphi^n f) \leq \lambda^{-n} \sup_{C^n(x)} e^{S_n \varphi} \leq \kappa e^{-n \log \lambda + S_n \varphi(x)}$$

pour une constante κ ne dépendant que de φ .

L'argument du Lemme 7 permet d'obtenir $L_\varphi^n f \geq \inf_{C^n(x)} e^{S_n \varphi} 1_{[x_0]}$, puis le même argument donne $L^{n+N} f \geq (\inf e^{S_N \varphi})(\inf e^{S_n \varphi})$. Le raisonnement précédent donne alors

$$\nu(C^m(x)) = \nu(\lambda^{-n-N} L_\varphi^{n+N} f) \geq \frac{1}{\kappa} e^{-n \log \lambda + S_n \varphi(x)}$$

quitte à augmenter la constante κ .

Il ne reste qu'à identifier la pression avec $\log \lambda$. En fait un ensemble E_n qui est $(n, 1)$ -séparé maximal est un ensemble qui contient exactement un point de chaque cylindre de longueur n . Donc

$$\sum_{x \in E_n} e^{S_n \varphi(x)} \approx \sum_{|C|=n} \lambda^n \mu(C)$$

ce qui prouve que $P(\varphi) = \log \lambda$. □

La mesure construite est donc aussi un état d'équilibre d'après le premier chapitre.

THÉORÈME 8. *La mesure μ est l'unique état d'équilibre pour le potentiel φ : pour toute mesure invariante $m \neq \mu$ on a*

$$P(\varphi) = h_\mu + \int \varphi d\mu > h_m + \int \varphi dm.$$

3.3. Perturbations complexes de l'opérateur et applications. Soit $\psi: X \rightarrow \mathbb{R}$ un autre potentiel Hölder, et considérons le nouvel opérateur $L_{\varphi+z\psi}$ avec $z \in \mathbb{C}$.

LEMME 11. *L'application $z \mapsto L_{\varphi+z\psi}$ est holomorphe de \mathbb{C} dans l'espace des opérateurs linéaires continus sur les fonctions Hölder d'exposant α .*

DÉMONSTRATION. Développement en série entière de l'exponentielle donne

$$L_{\varphi+z\psi}(\cdot) = \sum_n L_\varphi \left(\frac{1}{n!} z^n \psi^n \cdot \right) = \sum_n \frac{1}{n!} z^n L_\varphi(\psi^n \cdot).$$

□

On sait que L_φ est un opérateur dont la valeur propre maximale $\lambda = e^{P(\varphi)}$ est isolée. Donc on peut utiliser les théorèmes de perturbations holomorphes :

THÉORÈME 9. *pour z petit, on peut encore écrire $L_{\varphi+z\psi} = \lambda_z P_z + Q_z$ avec P_z la projection sur la valeur propre maximale $\lambda_z \in \mathbb{C}$, et Q_z de rayon spectral strictement inférieur à $|\lambda_z|$, avec $P_z Q_z = Q_z P_z = 0$. L'application $z \mapsto \lambda_z$ est holomorphe, de plus on peut choisir le vecteur propre h_z associé à la valeur propre λ_z tel que $z \mapsto h_z$ soit holomorphe.*

On ne donnera pas la preuve de ce résultat. Il va nous permettre d'établir la régularité de la pression topologique, et aussi de démontrer le théorème limite central.

On suppose pour simplifier que $\lambda_0 = 1$ (c'est toujours possible en retranchant sa pression à φ) et $\int \psi d\mu = 0$. Partons de l'égalité

$$L_{\varphi+t\psi} h_t = e^{P(\varphi+t\psi)} h_t.$$

Après avoir dérivé par rapport à t , une intégration par rapport à ν donne $P'(0) = \int \psi d\mu = 0$.

En dérivant deux fois, une intégration par rapport à ν donne $P''(0) = \int \psi^2 d\mu + 2 \int \psi h'_0 d\nu$. Ce même calcul appliqué à l'indentité $L_{\varphi+t\psi}^n h_t = e^{nP(\varphi+t\psi)} h_t$ donne

$$nP''(0) = \int (S_n \psi)^2 d\mu + 2 \int (S_n \psi) h'_0 d\nu.$$

Le théorème de Birkhoff donne alors

$$P''(0) = \lim \frac{1}{n} \int (S_n \psi)^2 d\mu = \int \psi^2 d\mu + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int \psi \psi \circ \sigma^n d\mu =: \sigma_{\mu}(\psi).$$

Le nombre $\sigma_{\mu}(\psi)$ est la variance asymptotique de $\frac{1}{\sqrt{n}} S_n \psi$.

PROPOSITION 10. *Pour φ et ψ Hölder, l'application $t \mapsto P(\varphi + t\psi)$ est réelle analytique, et ses deux premières dérivées sont $P'(t) = \int \psi d\mu_t$ et $P''(t) = \sigma_{\mu_t}(\psi) \geq 0$, où μ_t est l'état d'équilibre du potentiel $\varphi + t\psi$. On a $\sigma_{\mu_t}(\psi) = 0$ ssi ψ est cohomologue à une constante, i.e. il existe g Lipschitz telle que $\psi = c + g \circ \sigma - g$ pour une constante c . En particulier la pression est strictement convexe ou alors affine.*

DÉMONSTRATION. Il reste à étudier les cas où la variance asymptotique s'annule. Si ψ est cohomologue à 0 c'est évident. Réciproquement, si $\sigma_{\mu}(\psi) = 0$ montrons que ψ est cohomologue à une constante. Remplaçant si nécessaire φ par $\varphi - P(\varphi) + \log h - \log h \circ \sigma$ on peut supposer que $L1 = 1$. La fonction $g = \sum_{k=1}^{\infty} L^k \psi$ existe car $\int \psi d\mu = 0$ par convergence normale dans l'espace des fonctions Lipschitz. Remarquons que $\sigma_{\mu}(\psi) = \int \psi^2 d\mu + \int \psi g d\mu$. On a, du fait que $L\psi = g - Lg$,

$$\int (\psi + g - g \circ \sigma)^2 d\mu = \int \psi^2 + \int g^2 + 2 \int \psi g - 2 \int \psi g \circ \sigma - 2 \int g g \circ \sigma = 0 + \int 2g(g - L\psi - Lg) = 0.$$

Donc $\psi = g \circ \sigma - g$ μ -presque partout, et donc partout par continuité. \square

THÉORÈME 11. *Soit φ un potentiel Hölder. Alors pour toute fonction ψ Hölder non cohomologue à une constante, la suite de variable aléatoire $S_n \psi$, sous la loi μ_{φ} , suit un théorème limite central : Si $\sigma_{\mu_{\varphi}}(\psi) > 0$ alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{\varphi} \left(\left\{ \frac{S_n \psi - n \int \psi d\mu}{\sigma_{\mu_{\varphi}}(\psi) \sqrt{n}} < a \right\} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

DÉMONSTRATION. On calcule la fonction caractéristique de la suite $S_n \psi$. Supposons $\int \psi d\mu = 0$.

$$\int \exp(iu \frac{1}{\sqrt{n}} S_n \psi) d\mu = \int L_{\varphi + i \frac{u}{\sqrt{n}} \psi}^n(1) d\mu.$$

Le développement limité de $L_{\varphi+z\psi}$ à l'ordre 2 avec $z = i \frac{u}{\sqrt{n}}$ donne

$$L_{\varphi + i \frac{u}{\sqrt{n}} \psi}^n(1) = \left(1 - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{u^2}{n} \right)^n + o(1) \rightarrow \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma^2 u^2\right),$$

qui est la fonction caractéristique de la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. \square

Analyse multifractale

4. Introduction à la théorie de la dimension

On se place dans \mathbb{R}^d .

Notion de longueur, surface, volume, etc. intuitive. Un pull en laine? Une éponge? la côte de Bretagne? pas clair.

Dimension de boîte. Soit A un ensemble. On compte le nombre minimal de boules de rayon ε qu'il faut pour recouvrir A . Soit $N_\varepsilon(A)$. On définit $\underline{\dim}_B(A) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon(A)}{|\log \varepsilon|}$. De même avec la limsup. Bien car facile à définir, mais pas très fin : la dimension de boîte de A et sa fermeture \bar{A} sont les mêmes!

Dimension de Hausdorff. On définit la mesure de Hausdorff de dimension $\beta \geq 0$.

$$M(A, \beta, \delta) = \inf \sum_i (\text{diam } V_i)^\beta$$

où l'infimum est pris sur tous les recouvrements de A par les V_i avec $\text{diam } V_i \leq \delta$. Par monotonie la limite $M(A, \beta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} M(A, \beta, \delta)$ existe. La fonction $\beta \mapsto M(A, \beta)$ est décroissante, la fonction $A \mapsto M(A, \beta)$ est croissante.

PROPOSITION 12. Soit $\beta \geq 0$ et $\varepsilon > 0$.

Si $M(A, \beta) < +\infty$ alors $M(A, \beta + \varepsilon) = 0$; si $M(A, \beta) > 0$ alors $M(A, \beta - \varepsilon) = +\infty$.

DÉFINITION 7. On appelle dimension de Hausdorff de l'ensemble A , noté $\dim_H A$, l'unique réel tel que $M(A, \beta) = +\infty$ si $\beta < \dim_H A$ et $M(A, \beta) = 0$ si $\beta > \dim_H A$.

Rem. Pour $\beta = \dim_H A$ on peut tout avoir pour $M(A, \beta)$: nul, fini non nul, ou infini.

Rem. Pour tout $\beta \geq 0$, $M(\cdot, \beta)$ est une mesure extérieure, les boréliens sont mesurables. Pour β entier on retrouve la mesure de Lebesgue, à une constante près.

PROPOSITION 13. Si f est Lipschitz alors $\dim_H f(A) \leq \dim_H A$.

Exemple lisse : La dimension de Hausdorff d'une variété différentielle de dimension k est égale à k , car les cartes sont bi-Lipschitz.

Exemple à trou : L'ensemble de Cantor triadique est de dimension $\frac{\log 2}{\log 3}$.

PROPOSITION 14. Si (A_n) est une suite d'ensembles alors $\dim_H \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \dim_H A_n$.

Rem. C'est faux en général pour les unions non dénombrables.

DÉFINITION 8. Soit μ une mesure de Radon (i.e. les boréliens sont mesurables et finie sur les compacts) Alors on définit la dimension de Hausdorff de μ par

$$\dim_H \mu = \inf \{ \dim_H A : A^c \text{ } \mu\text{-négligeable} \}.$$

Exemple : difficile, à part la mesure de Lebesgue.

PROPOSITION 15. Si μ est une mesure de probabilité, alors $\mu(A) = 1$ implique $\dim_H A \geq \dim_H \mu$.

DÉFINITION 9. Soit μ une mesure de Radon. On définit les dimensions ponctuelles inférieures et supérieures par

$$\underline{d}_\mu(x) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, \varepsilon))}{\log \varepsilon} \quad \text{et} \quad \bar{d}_\mu(x) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, \varepsilon))}{\log \varepsilon}$$

Interprétation.

THÉORÈME 16. *Pour toute mesure de Radon on a $\dim_H \mu = \text{esssup } \underline{d}_\mu$.*

LEMME 12 (Frostman). *Si $\underline{d}_\mu \geq \gamma$ sur un mesurable A de mesure positive alors $\dim_H A \geq \gamma$.*

PREUVE DU THÉORÈME. Le lemme de Frostman donne une première inégalité.

La seconde s'obtient grâce au lemme de recouvrement de Vitali : Si (B_j) est une famille quelconque qui recouvre A alors il existe une sous-famille dénombrable d'ensembles B_i disjoints tel que $(3B_i)$ recouvre A . \square

5. Analyse multifractale des répulseurs conformes

5.1. Dimension, entropie et exposant de Lyapunov. Soit M un ouvert de \mathbb{R} , $f: M \rightarrow M$ une application de classe C^2 . On suppose que (J, f) est un répulseur, c'est-à-dire que J est un compact vérifiant

- (i) $J = \bigcap_n f^{-n} M$;
- (ii) J est répulsif $\inf_J |f'| > 1$.

DÉFINITION 10. *Une partition de Markov est un recouvrement fini $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_p\}$ de J tel que*

- (i) R_i soit la fermeture de son intérieur ;
- (ii) les intérieurs des R_i sont disjoints ;
- (iii) si il existe un $x \in J$ dans l'intérieur de R_i tel que $f(x)$ soit dans l'intérieur de R_j alors $f(R_i) \supset R_j$.

Le diamètre de la partition $\mathcal{R} = \{R_i\}$ est défini par $\text{diam } \mathcal{R} = \max_i \text{diam } R_i$.

On peut montrer qu'il existe des partitions de Markov de diamètre arbitrairement petit (cf. annexe) On fera l'hypothèse de séparation forte (ii)fort : les R_i sont disjoints. Ce n'est pas essentiel mais simplifie les preuves. En particulier, il n'y a pas de problème de bords lors du codage.

Par l'hypothèse de répulsion f est localement dilatante d'un facteur $\theta^{-1} > 1$ (cf. annexe), donc si $\text{diam } \mathcal{R}$ est suffisamment petit alors le diamètre des cylindres est exponentiellement petit : Pour $x \in J$ tel que $f^j(x) \in R_{\omega_j}$ pour tout $j = 0, \dots, n-1$, notons $C_n(x) = \bigcap f^{-j} R_{\omega_j}$. Alors on a l'estimation $\text{diam } C_n(x) \leq c\theta^n$.

On note $A_{i,j} = 1$ si $f(R_i) \supset R_j$ et 0 sinon. La matrice de transition associée définit un sous-shift Σ_A^+ , et l'application $\pi: \Sigma_A^+ \rightarrow J$ telle que $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n} R_{\omega_n} = \{\pi(\omega)\}$ est bien définie. De plus, c'est un homéomorphisme Hölder d'inverse Hölder. Plus précisément on a l'estimation suivante :

PROPOSITION 17. *Il existe deux constantes $c, c' > 0$ telle que pour tout n -cylindre $C_n(x)$ de la partition de Markov, en notant $d_n(x) = 1/|(f^n)'(x)|$, on a*

$$J \cap B(x, cd_n(x)) \subset J \cap C_n(x) \subset J \cap B(x, c'd_n(x))$$

DÉFINITION 11. *On appelle exposant de Lyapunov de $x \in J$ la limite $\lambda(x) = \lim \frac{1}{n} \log |(f^n)'(x)|$.*

PROPOSITION 18. *Si μ est une mesure invariante par f alors l'exposant de Lyapunov existe μ -presque partout. Si de plus la mesure est ergodique, alors μ -presque partout*

$$\lambda(x) = \int \log |f'| d\mu := \lambda_\mu(f).$$

THÉORÈME 19. *Soit μ une mesure de probabilité invariante par f et ergodique. Alors la dimension ponctuelle existe μ -presque partout, et on a l'égalité μ -presque partout*

$$d_\mu(x) = \frac{h_\mu(f)}{\lambda_\mu(f)} = \dim_H \mu.$$

THÉORÈME 20 (Formule de Bowen). *La dimension du répulseur J est l'unique racine t de l'équation $P(-t \log |f'|) = 0$.*

DÉMONSTRATION. Posons $u = \log |f'|$. Puisque $0 < \inf u \leq \sup u < \infty$ il existe un unique t_0 qui annule la pression. Soit μ la mesure d'équilibre de $-t_0 u$. Puisque c'est une mesure de Gibbs de pression nulle, on a $1 = \sum_C \mu(C) \approx \sum_{|C|=n} (\text{diam } C)^{t_0}$ pour tout recouvrement de J par des n -cylindres. Donc $\dim_H J \leq t_0$. Par ailleurs, $\dim_H \mu = \frac{h_\mu(f)}{\lambda_\mu(f)} = t_0$. Puisque $\mu(J) = 1$, il vient $\dim_H \mu = \dim_H J = t_0$. \square

5.2. Analyse multifractale. Une mesure est fractale si sa dimension est non entière. Multifractale si sa dimension ponctuelle n'est pas une constante : selon l'endroit où l'on se trouve on ne voit pas le 'même' fractal. À l'origine l'analyse multifractale s'intéresse principalement aux ensembles

$$K_\alpha = \{x \in X : d_\mu(x) = \alpha\}.$$

On mesure ensuite la taille de K_α par sa dimension

$$f(\alpha) = \dim_H K_\alpha.$$

Dans notre cas on va plutôt mesurer les ensembles de niveau d'autres quantités, les sommes de Birkhoff.

Soit $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Hölder, et considérons

$$K_\alpha = \{x \in J : \lim \frac{1}{n} S_n \varphi(x) = \alpha\}; \quad f(\alpha) = \dim_H K_\alpha.$$

Notons $u = \log |f'|$.

THÉORÈME 21. Soit $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Hölder. Notons $\underline{\alpha} = \inf_\mu \int \varphi d\mu$ et $\bar{\alpha} = \sup_\mu \int \varphi d\mu$. Alors si $\alpha \notin [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$ on a $K_\alpha = \emptyset$, si $\alpha \in (\underline{\alpha}, \bar{\alpha})$, alors $K_\alpha \neq \emptyset$ et on a

(i) l'application $\alpha \mapsto f(\alpha)$ est analytique;

(ii) principe variationnel conditionnel : $f(\alpha) = \sup \{ \frac{h_\mu(f)}{\lambda_\mu(f)} : \int \varphi d\mu = \alpha \}$;

(iii) le sup est atteint : il existe un état d'équilibre μ_α tel que $\mu_\alpha(K_\alpha) = 1$ et $\dim_H \mu_\alpha = f(\alpha)$;

(iv) $f(\alpha) = \inf_{q \in \mathbb{R}} T_\alpha(q)$ où $T_\alpha(q)$ est l'unique racine $t \in \mathbb{R}$ de l'équation $P(q\varphi - tu) - q\alpha = 0$.

LEMME 13. Pour tout $\alpha \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$ et tout réel q on a $P(q\varphi - f(\alpha)u) - q\alpha \geq 0$.

DÉMONSTRATION. Soit $u_0 = \inf u > 0$. Fixons α dans l'intervalle et $q \in \mathbb{R}$. Soit $d < f(\alpha)$. Pour $\delta > 0$ et N entier posons

$$L_{\delta, N} = \{x \in J : \forall n \geq N, |S_n \varphi(x) - n\alpha| \leq \delta n\}$$

Puisque $K_\alpha \subset \cup_N L_{\delta, N}$, on a $\dim_H K_\alpha \leq \sup_N \dim_H L_{\delta, N}$. Prenons N et δ tel que $d + \delta q / u_0 < \dim_H L_{\delta, N}$. Soit $n \geq N$ suffisamment grand pour qu'un recouvrement de $L_{\delta, N}$ par des n -cylindres vérifie

$$\begin{aligned} 1 &\leq \sum_{|C|=n, C \cap L_{\delta, N} \neq \emptyset} (\text{diam } C)^{d + \delta q / u_0} \\ &\leq c \sum_{|C|=n, C \cap L_{\delta, N} \neq \emptyset} e^{-d S_n u} e^{-q \delta n} \\ &\leq c \sum_{|C|=n} e^{-d S_n u(C) + q S_n \varphi(C)} e^{-n q \alpha}. \end{aligned}$$

En prenant la limite des $\frac{1}{n} \log$ il vient $0 \leq P(-du + q\varphi) - q\alpha$, d'où le résultat par continuité de la pression. \square

LEMME 14. Pour $\alpha \in (\underline{\alpha}, \bar{\alpha})$, la fonction $F(q) = q \mapsto P(-du + q\varphi) - q\alpha$ atteint son minimum en un $q_\alpha \in \mathbb{R}$, $F(q_\alpha) = 0$ et μ_α , la mesure d'équilibre du potentiel $q_\alpha \varphi - f(\alpha)u$ vérifie (iii) du théorème.

DÉMONSTRATION. La limite de $F(q)$ en $\pm\infty$ est $+\infty$ donc le minimum est atteint en un $q_\alpha \in \mathbb{R}$. On a $F'(q_\alpha) = 0$, soit $\int \varphi d\mu_\alpha - \alpha = 0$. De plus, écrivant que μ_α est un état d'équilibre il vient

$$h_{\mu_\alpha}(f) - f(\alpha) \int u d\mu_\alpha \geq 0$$

d'où $\dim_H \mu_\alpha = \frac{h_{\mu_\alpha}(f)}{\lambda_\mu(f)} \geq f(\alpha)$. Par ailleurs l'ergodicité implique $\mu_\alpha(K_\alpha) = 1$, donc $\dim_H \mu_\alpha \leq f(\alpha)$, qui donne l'égalité. \square

LEMME 15. $f(\alpha) = \inf_q T_\alpha(q)$ et $\alpha \mapsto f(\alpha)$ est analytique.

DÉMONSTRATION. On a $P(q\varphi - f(\alpha)u) \geq q\alpha = P(q\varphi - T_\alpha(q))$ donc $T_\alpha(q) \geq f(\alpha)$. Par ailleurs, pour $q = q_\alpha$ on a l'égalité, donc $f(\alpha) = \inf_q T_\alpha(q)$.

Notons $F(q, \delta, \alpha) = P(q\varphi - \delta u) - q\alpha$. $f(\alpha)$ est l'unique racine δ de $\inf_q F(q, \delta, \alpha) = 0$, ce qui revient à la double équation $F(q, \delta, \alpha) = 0 = \partial_q F(q, \delta, \alpha)$.

Soit $G(q, \delta, \alpha) = (F(q, \delta, \alpha), \partial_q F(q, \delta, \alpha))$. On veut appliquer le théorème des fonctions implicites, pour obtenir $q(\alpha)$ et $\delta(\alpha)$ solutions de $G(q, \delta, \alpha) = (0, 0)$. Pour cela il suffit d'avoir $\partial_{(q, \delta)} G$ inversible. Or $\det \partial_{(q, \delta)} G = \partial_q F \partial_{q, \delta}^2 F - \partial_q F \partial_{q, q}^2 F$. Comme $\partial_q F = \int \varphi d\mu_{q, \delta} - \alpha = 0$ lorsque $q = q(\alpha)$ et $\delta = \delta(\alpha)$, seul compte le second terme. Or $\partial_\delta F = - \int u d\mu_{q, \delta} < 0$, et $\partial_{q, q}^2 F = \sigma_{\mu_{q, \delta}}(\varphi) > 0$. \square

Exemple : analyse complète dans le cas d'un Cantor généré par deux branches de pente Δ_i et un potentiel ϕ dépendant de la première coordonnée. Formule de Bowen, analyse multifractale.

Réurrence de Poincaré

6. Induction et lemme de Kac

Soit (X, f, μ) un système dynamique mesuré.

6.1. Construction des tours. On supposera f inversible et d'inverse mesurable.

Soit A un ensemble mesurable. soit $\tau_A(x) = \inf\{n \geq 1: f^n(x) \in A\}$ le premier temps de retour dans A . D'après Poincaré, $\tau_A(x) < +\infty$ pour μ -presque tout $x \in A$. Soit $\text{Fut}(A) = \cup_{n \geq 0} f^n A$ le futur de A . Si μ est ergodique alors $\text{Fut}(A)$ est de mesure pleine.

On peut construire une tour au dessus de A : Soit $A_k = A \cap \{\tau_A = k\}$. On a $A = \cup_k A_k \cup A_\infty$.

La base de la tour sera l'ensemble A . Le premier étage sera $f(A \setminus A_1)$, c'est-à-dire l'image par f des points de A qui ne revenaient pas dans A du premier coup. Plus généralement, le j ème étage est formé par la j ème image f^j des points de A qui ne reviennent pas dans A avant j itérations. Les ensembles $(f^j A_k)_{0 \leq j < k \leq \infty}$ forment une partition mesurable de $\text{Fut}(A)$. On peut représenter la dynamique restreinte à $\text{Fut}(A)$ sur la tour : appliquer f revient à monter d'un étage, jusqu'à ce qu'on arrive au sommet pour retourner ensuite en A .

LEMME 16 (Lemme de Kac). *le temps de retour moyen est donné par*

$$\int_A \tau_A d\mu_A = \frac{\mu(\text{Fut}(A))}{\mu(A)}.$$

En particulier si μ est ergodique alors le temps de retour moyen dans A est $1/\mu(A)$.

DÉMONSTRATION. On construit la tour au dessus de A . Par invariance, pour tout k les ensembles $f^j A_k$, $j < k$ ont même mesure. Donc

$$\int_A \tau_A d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} k \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\cup_{j < k} f^j A_k) = \mu(\text{Fut}(A)).$$

□

L'application f_A définie par $f_A(x) = f^k(x)$ si $x \in A_k$ est définie μ -presque partout sur A , et on peut montrer que (A, f_A, μ_A) est à son tour un système dynamique mesuré, c'est-à-dire que la mesure μ_A est invariante par f_A . On l'appelle le système induit sur A .

7. Temps de répétition en dynamique symbolique

Soit $\Sigma_a = \{1, \dots, a\}^{\mathbb{N}}$ et σ le shift. Soit Σ un sous-ensemble mesurable de Σ_a et invariant. (Σ, σ) est un sous-shift. Etant donné $\omega = (\omega_i)_{i \geq 0} \in \Sigma$ et $m \leq n$ on note le *mot* (la suite finie) $\omega_m \omega_{m+1} \dots \omega_n$ par $\omega_{[m,n]}$.

Le n -temps de répétition d'une suite $\omega \in \Sigma$ est défini par

$$R_n(\omega) = \min\{k \geq 1: \omega_{k+[0,n-1]} = \omega_{[0,n-1]}\},$$

et le n -temps de répétition sans chevauchement par

$$R_n^{no}(\omega) = \min\{k \geq n: \omega_{k+[0,n-1]} = \omega_{[0,n-1]}\}.$$

Nous allons voir que le taux de croissance exponentiel de R_n et R_n^{no} sont liés à l'entropie. Le premier point est que ces deux quantités sont asymptotiquement égales.

LEMME 17. *Soit μ une mesure invariante et ergodique sur (Σ, σ) d'entropie $h_\mu(\sigma) > 0$. Alors pour μ -p.t. ω on a $R_n(\omega) = R_n^{no}(\omega)$ à partir d'un certain rang.*

DÉMONSTRATION. Observons que $R_n(\omega) \neq R_n^{no}(\omega)$ ssi $R_n(\omega) < n$. Supposons que ce soit le cas. Il existe alors $k < n$ tel que $R_n(\omega) = k$, d'où $\omega_{[0, n-1]} = \omega_{k+[0, n-1]}$. Donc $\omega_{[0, k-1]} = \omega_{[k, 2k-1]}$.

Soit $\epsilon \in (0, h_\mu/3)$ et considérons l'ensemble

$$(1) \quad \Gamma = \Gamma(N) := \left\{ \omega \in \Sigma : \forall k \geq N, \left| \frac{1}{k} \log \mu(\omega_{[0, k-1]}) + h_\mu \right| < \epsilon \right\}.$$

On peut estimer la mesure de l'ensemble

$$\Gamma_k := \{\omega \in \Gamma : \omega_{[0, k-1]} = \omega_{[k, 2k-1]}\}.$$

En fait, si $|s| := k$ dénote la longueur de la suite finie $s_0 \cdots s_{k-1}$, or du k -cylinder du shift, et ss la concaténation,

$$\mu(\Gamma_k) = \sum_{|s|=k} \mu(\omega \in \Gamma_k : \omega_{[0, k-1]} = s) \leq \sum_{|s|=k} \mu(\Gamma \cap ss).$$

Remarquons que si $|s| = k$ et $\Gamma \cap ss \neq \emptyset$ alors $\mu(ss) \leq e^{-2k(h_\mu - \epsilon)}$ et $s \cap \Gamma \neq \emptyset$, ce qui implique que $\mu(s) \geq e^{-k(h_\mu + \epsilon)}$. Donc il y a au plus $e^{k(h_\mu + \epsilon)}$ tels s . Donc $\mu(\Gamma_k) \leq e^{-k(h_\mu - 3\epsilon)}$. Par conséquent $\sum_k \mu(\Gamma_k) < \infty$. Par Borel-Cantelli, pour μ -p.t. $\omega \in \Gamma$, il existe k_ω tel que si $k > k_\omega$ alors $\omega \notin \Gamma_k$. Si de plus ω n'est pas périodique alors $R_n(\omega) \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$, donc pour n assez grand $R_n(\omega) > k_\omega$, ce qui implique $R_n(\omega) = R_n^{no}(\omega)$. La conclusion vient alors du théorème de Shannon-McMillan-Breiman puisque $\mu(\cup_N \Gamma(N)) = 1$, et du fait que la mesure μ ne charge pas de point périodique. \square

Le théorème suivant relie le taux de croissance exponentiel

THÉORÈME 22. *Soit μ une mesure invariante et ergodique sur (Σ, σ) d'entropie $h_\mu(\sigma) > 0$. Alors pour μ -p.t. ω on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log R_n(\omega) = h_\mu.$$

Ce résultat est due à Ornstein et Weiss et repose sur des arguments combinatoires qui sont extrait dans les deux lemmes suivants.

On appellera *intervalle* un ensemble d'entiers consécutifs que l'on notera $[m, n] = \{k \in \mathbb{N} : m \leq k \leq n\}$ et on notera un *singleton* $[m, m]$ par $[m]$. Etant donné un entier L on appelle *squelette* une partition \mathcal{S} de l'intervalle $[0, L-1]$ par des sous-intervalles disjoints, $[0, L-1] = \cup_{S \in \mathcal{S}} S$. Si $S = [m, n]$ est un élément d'un squelette on note sa *longueur* par $|S| := m - n + 1$.

Pour des entiers $1 < M < N < L$ et des réels $b > 0$ et $\epsilon \in (0, 1)$ on dit qu'une suite $\omega = \omega_{[0, L-1]}$ est *friable* selon le squelette \mathcal{S} si chaque $S \in \mathcal{S}$ est soit

(i) un singleton,

(ii) un intervalle de longueur $|S| \in [M, N]$ tel que pour un $t \in [M, e^{bN}]$ $\omega_{t+S} = \omega_S$, dans ce cas on dit que S est un intervalle long,

et l'intervalle $[0, L-1]$ est presque exclusivement composé de long intervalles :

$$\sum_{\text{long } S \in \mathcal{S}} |S| \geq (1 - \epsilon)L.$$

LEMME 18. *Pout tout $\delta > 0$ il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $M < 1/\epsilon$, N et L , le nombre de squelette admettant au moins une suite friable est inférieur à $e^{\delta L}$.*

DÉMONSTRATION. Le nombre j de singletons est compris entre 0 et ϵL , et ils peuvent être dans $\binom{L}{j}$ positions différentes dans $[0, L-1]$. Donc il y a au plus $\sum_{j \leq \epsilon L} \binom{L}{j}$ choix pour les positions des singletons.

Chaque intervalle long S a une longueur supérieure ou égale à M , donc il y a au plus $L/M \leq \epsilon L$ intervalles longs. Une fois la configuration des singletons fixée, la position et la longueur des intervalles longs est déterminée par la position de leur extrémité de gauche, donc il y a au plus $\binom{L}{k}$ choix pour eux

s'il y a k intervalles longs. Donc il y a au plus $\sum_{k \leq \epsilon L} \binom{L}{k}$ choix pour la configuration des intervalles longs.

On utilise alors la simple estimation

$$\sum_{j \leq \epsilon L} \binom{L}{j} \leq \epsilon^{-\epsilon L} \sum_{j \leq \epsilon L} \binom{L}{j} \epsilon^j \leq \left(\frac{1 + \epsilon}{\epsilon^\epsilon} \right)^L.$$

Quel que soit $\delta > 0$, si ϵ est assez petit le nombre de différents squelettes admissibles est borné par $e^{\delta L}$. \square

LEMME 19. *Il y a au plus $a^{\epsilon L} e^{bL}$ suites de longueur L friable selon le même squelette.*

DÉMONSTRATION. Fixons un squelette \mathcal{S} . On remplit d'abord les singletons. Il y en a au plus ϵL , ce qui donne au plus $a^{\epsilon L}$ possibilités.

Pour une configuration de singletons donnée, on remplit les intervalles longs, de la droite vers la gauche. Pour le premier S , il existe un temps $t \leq e^{|S|}$ tel que $\omega_S = \omega_{t+S}$. Comme ω_{t+S} est à droite, il est déjà déterminé. Donc ω_S est l'un des ω_{j+S} , $j \in \{N, \dots, \lfloor e^{|S|} \rfloor\}$. Ce qui laisse au plus $e^{|S|}$ choix différents pour ω_S . On procède alors de la même manière pour le second intervalle, et ainsi de suite. Finalement, il peut y avoir au plus

$$\prod_{S \in \mathcal{S}} e^{|S|} \leq e^{bL}$$

différentes façons de remplir les longs intervalles. \square

PREUVE DU THÉORÈME 22. Soit $\underline{R}(\omega) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log R_n^{no}(\omega)}{n}$ et $\overline{R}(\omega) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log R_n(\omega)}{n}$.

Tout d'abord on a $\overline{R}(\omega) \leq h_\mu$ pour μ -p.t. ω . En effet, soit $\varepsilon > 0$ et $h > h_\mu + \varepsilon$. Pour $n \geq N$ on a

$$\mu(\Gamma(N) \cap \{R_n \geq e^{nh}\}) \leq e^{-nh} \int_{\Gamma(N)} R_n d\mu \leq e^{-nh} \sum_{|C|=n} \int_C \tau_C d\mu \leq e^{-nh} e^{n(h_\mu + \varepsilon)}.$$

ce majorant est sommable en n , donc par Borel-Cantelli on a presque partout $R_n < e^{nh}$ à partir d'un certain rang. Donc $\overline{R} < h_\mu$ μ -p.p.

D'après le Lemme 17 il reste à montrer que $\underline{R}(\omega) \geq h_\mu$ pour μ -p.t. ω .

Puisque $R_n^{no}(\sigma\omega) \leq R_{n+1}^{no}(\omega)$, on a $\underline{R}(\sigma\omega) \leq \underline{R}(\omega)$ pour tout ω . Ceci implique $\underline{R} \circ \sigma = \underline{R}$ μ -p.p., donc \underline{R} est égal à une constante b_0 p.p.. Supposons par contradiction que $b_0 < h_\mu$, et fixons $b < h \in (b_0, h_\mu)$.

Soit $\delta \in (0, h - b)$, prenons $\epsilon > 0$ donné par le Lemme 18 tel que $a^\epsilon e^{b+\delta} < e^h$, et fixons $M < 1/\epsilon$. Soit

$$A_N = \{\omega \in \Sigma^+ : \exists n \in [M, N], \frac{\log R_n^{no}(\omega)}{n} < b\}.$$

Si N est assez grand $\mu(A_N) > 1 - \epsilon/2$. Soit

$$B_L = \{\omega \in \Sigma^+ : \frac{1}{L} \sum_{k=0}^L 1_{A_N}(\sigma^k \omega) > 1 - \epsilon/2\}.$$

D'après le Théorème ergodique de Birkhoff si L est assez grand alors $\mu(B_L) > 0.1$ et $a^{(e^{bN})} < \epsilon L/2$.

Comptons le nombre de cylindres de longueur L susceptibles de contenir un point $\omega \in B_L$.

Soit $\omega \in B_L$. On construit un squelette \mathcal{S} sur $\omega_{[0, L-1]}$ de la façon suivante : Si $\omega \notin A_N$ alors le premier élément de \mathcal{S} sera le singleton $[0]$, sinon on prend $[0, n-1]$ où n est entre M et N , et $R_n^{no}(\omega) < e^{bn}$. Si l'on a déjà construit le squelette jusqu'à la position $k-1 \leq L - e^{bN}$, alors le prochain élément sera le singleton $[k]$ si $\sigma^k \omega \notin A_N$, sinon on prends l'intervalle $[k, k+n-1]$ où n est entre M et N , et $R_n^{no}(\sigma^k \omega) < e^{bn}$. Le reste de la partition est constitué de singletons $[k]$, avec $k \in [L - e^{bN}, L-1]$. Il y a au plus $e^{bN} + \epsilon/2 < \epsilon L$ singletons, donc la suite $\omega_{[0, L-1]}$ est friable selon le squelette \mathcal{S} .

Par le Lemme 19 il y a au plus $a^{\epsilon L} e^{bL}$ suites friables selon le squelette \mathcal{S} . De plus, Par le Lemme 18 il y a au plus $e^{\delta L}$ squelettes, donc le nombre de suites différentes est borné par

$$a^{\epsilon L} e^{\delta L} e^{bL} < e^{hL}.$$

La contradiction vient alors du fait que $h < h_\mu$, et $\mu(B_L) > 0.1$ pour des L arbitrairement grand. \square

8. Récurrence quantitative dans les répulseurs conformes

Soit (X, f, μ) un système dynamique mesuré ergodique et ξ une partition mesurable finie. Le théorème sur les temps de répétition s'applique au sous-shift engendré par la dynamique f via le codage par la partition ξ . Si $R_n(x, \xi)$ dénote le premier temps k pour lequel $f^k(x)$ et x sont dans le même n -cylindre alors on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log R_n(x, \xi)}{n} = h_\mu(f, \xi) \quad \mu - \text{p.p.}$$

On considère un répulseur conforme (J, f) comme au chapitre précédent. La question est d'estimer, étant donné un point $x \in J$ typique, le temps nécessaire pour que l'orbite $f^n(x)$ retourne ϵ -proche de x lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. Soit donc $\tau_\epsilon(x) = \inf\{n \geq 1 : d(f^n(x), x) < \epsilon\}$. Soit

$$\underline{R}(x) = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log \tau_\epsilon(x)}{-\log \epsilon} \quad \text{et} \quad \overline{R}(x) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log \tau_\epsilon(x)}{-\log \epsilon}.$$

D'après le Lemme 17, les cylindres de la partition de Markov et les boules se comparent très bien, de sorte que pour n tel que $\epsilon |(f^n)'(x)| \approx 1$ on a $C_n(x) \approx B(x, \epsilon)$ d'où $\tau_\epsilon(x) \approx R_n(x)$. Donc

$$\frac{\log \tau_\epsilon(x)}{-\log \epsilon} \approx \frac{\log R_n}{n \frac{1}{n} \log |(f^n)'(x)|} \rightarrow \frac{h_\mu(f)}{\lambda_\mu(f)}.$$

On obtient alors

THÉORÈME 23. *Soit (J, f) un répulseur conforme. Pour tout mesure μ d'entropie $h_\mu(f) > 0$ on a*

$$\underline{R}(x) = \overline{R}(x) = \frac{h_\mu(f)}{\lambda_\mu(f)} = \dim_H(\mu) \quad \mu\text{-p.p.}$$

Construction des partitions de Markov

Dans cette section nous allons donner la construction des partitions de Markov pour des applications C^1 dilatantes sur une variété M . Ces partitions ont été introduites par Sinai et généralisées par Bowen.

DÉFINITION 12. Soient $\Lambda \subset M$ un compact et $f: M \rightarrow M$ une application C^1 . On dira que (Λ, f) est un répulseur si il existe un voisinage ouvert V de Λ tel que

(i) $\Lambda = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}V$

(ii) Il existe $\lambda \in (0, 1)$ tel que $|d_x f v| \geq \frac{1}{\lambda}|v|$ pour tous $x \in V$ et $v \in T_x M$.

Donnons tout de suite un exemple. Soit $M = \mathbb{C}$ et $f(z) = z^2$. Alors (S^1, f) est un répulseur. On peut prendre

$$V = \{z \in \mathbb{C} : 0.9 < |z| < 1.1\}.$$

En paramétrant S^1 par $e^{2i\pi t}$ avec $t \in [0, 1]$ on retrouve l'application $f(t) = 2t \pmod 1$.

PROPOSITION 24. Si (Λ, f) est un répulseur alors f restreinte à Λ forme un système dynamique topologique : f est continue sur le compact Λ et $f(\Lambda) \subset \Lambda$.

DÉMONSTRATION. Si $x \in \Lambda$ alors $f(x) \in \Lambda$! □

PROPOSITION 25. Si (Λ, f) est un répulseur alors il existe un voisinage ouvert V de Λ sur lequel f est dilatante¹, c'est-à-dire qu'ils existent $\delta > 0$ et $\lambda \in (0, 1)$ tels que pour tout $x \in \Lambda$ et $y \in V$,

$$\text{si } d(x, y) < \delta \text{ alors } d(fx, fy) \geq \frac{1}{\lambda}d(x, y).$$

DÉMONSTRATION. Comme f est C^1 , quitte à prendre $\lambda < 1$ légèrement plus grand et V légèrement plus petit la condition de dilatation sur la différentielle de f reste valable sur le voisinage V . On peut alors prendre $\delta = d(\Lambda, M \setminus V) > 0$ puis considérer le nouveau voisinage $V = \cup_{x \in \Lambda} B(x, \delta)$ et appliquer alors le théorème des accroissements finis sur les segments $[fx, fy]$. □

DÉFINITION 13. On dira que (Λ, f) est expansif² lorsque il existe $\delta > 0$ tel que pour tout couple (x, y) d'éléments de Λ ,

$$\text{si pour tout } n \geq 0 \text{ on a } d(f^n x, f^n y) < \delta \text{ alors } x = y.$$

On appelle δ une constante d'expansivité de f .

Le résultat suivant est immédiat.

PROPOSITION 26. Tout répulseur est expansif.

DÉFINITION 14. Une α -pseudo-orbite de (Λ, f) est une suite x_0, x_1, \dots d'éléments de Λ , éventuellement infinie, telle que pour tout $n \geq 0$, $d(f(x_n), x_{n+1}) < \alpha$.

DÉFINITION 15. On dit qu'une (vraie) orbite $(f^n(x_*))_{n \geq 0}$ est β -pistée³ par une α -pseudo-orbite $(x_n)_{n \geq 0}$ si pour tout $n \geq 0$ on a $d(f^n x_*, x_n) < \beta$.

THÉORÈME 27. Si (Λ, f) est un répulseur alors pour tout $\beta > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que toute α -pseudo-orbite dans Λ β -piste une vraie orbite de Λ .

1. En anglais 'expanding'.

2. En anglais 'expansive'. Ne pas confondre !

3. En anglais x_* β -shadows $(x_n)_n$.

DÉMONSTRATION. f étant C^1 et dilatante sur un voisinage V de Λ , c'est un difféomorphisme local. Par compacité de Λ il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in \Lambda$, $f: B(x, 2\epsilon) \rightarrow f(B(x, 2\epsilon))$ soit un difféomorphisme dilatant. En particulier $f(B(x, 2\epsilon)) \supset B(f(x), 2\epsilon)$ et pour tout $x \in \Lambda$, la branche inverse $f_x^{-1}: B(f(x), 2\epsilon) \rightarrow B(x, 2\epsilon)$ est bien définie. Sans perte de généralités on supposera que $B(x, 2\epsilon) \subset V$ pour tout $x \in \Lambda$ et que $\beta < \epsilon$. Soit alors $\alpha \in (0, \epsilon)$ tel que $\beta = \frac{\alpha}{1-\lambda}$.

Si la pseudo-orbite est infinie alors pour tout $p \geq 0$ on peut effectuer la construction ci-après qui nous donne un x_*^p qui est β -pisté par x_0, \dots, x_p .

Posons $y_p = x_p$. Nous allons définir par récurrence $(y_j)_{j \leq p}$. On posera $r_j = d(y_j, x_j)$. On a $r_p = 0 < \epsilon$. Supposons que l'on ait défini y_p, \dots, y_{j+1} et que $r_{j+1} < \epsilon$. On a alors

$$d(f(x_j), y_{j+1}) \leq d(f(x_j), x_{j+1}) + d(x_{j+1}, y_{j+1}) \leq \alpha + r_{j+1} < 2\epsilon.$$

Par conséquent la préimage $y_j := f_{x_j}^{-1} y_{j+1}$ est bien définie. De plus,

$$r_j = d(y_j, x_j) \leq \lambda d(f(y_j), f(x_j)) \leq \lambda[\alpha + r_{j+1}].$$

Par un récurrence immédiate on obtient

$$r_j \leq (\lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{p-j})\alpha \leq \frac{\alpha}{1-\lambda} < \epsilon$$

pour tout $j \leq p$, et donc la suite $(y_j)_{j \leq p}$ est bien définie. Le point

$$x_*^p := y_0 = f_{x_0}^{-1} \circ f_{x_1}^{-1} \circ \dots \circ f_{x_{p-1}}^{-1}(x_p)$$

vérifie les conditions annoncées.

Soit x_* un point d'accumulation de x_*^p , qui existe car la boule $\overline{B(x_0, \epsilon)}$ est compacte. Soit $n \geq 0$. Pour tout $p \geq n$ on a

$$d(f^n x_*, x_n) \leq d(f^n x_*, f^n x_*^p) + d(f^n x_*^p, x_n) \leq \beta + d(f^n x_*, f^n x_*^p).$$

Par continuité de f^n on obtient, en prenant une limite $p \rightarrow \infty$, que $d(f^n x_*, x_n) \leq \beta$. Donc l'orbite de x_* est β -pistée par l'orbite infinie x_0, x_1, \dots et comme $\beta < \epsilon$ on a $f^n x_* \in V$ pour tout n , i.e. $x_* \in \Lambda$.

Si la pseudo-orbite est finie il suffit d'appliquer la partie précédente à la pseudo-orbite infinie $x_0, \dots, x_p, f(x_p), f^2(x_p), \dots$ \square

Le corollaire suivant est immédiat.

COROLLAIRE 2. *Si β est inférieur à la moitié d'une constante d'expansivité de f alors le point x_* dans le théorème précédent est unique.*

Le 'pistage' justifie dans une certaine mesure l'utilisation d'ordinateurs pour simuler les systèmes dynamiques. En effet, un ordinateur aussi précis qu'il soit ne fournira au mieux que des α -pseudo-orbites où α sera certainement plus grand que la précision des calculs. Toutefois, pour les systèmes dilatants, et plus généralement les systèmes hyperboliques, il existe toujours une vraie orbite du système que suit la pseudo-orbite générée par l'ordinateur.

Dans la définition qui suit les intérieurs sont pris par rapport à la topologie induite sur Λ (en général Λ est un ensemble de Cantor, donc d'intérieur vide!).

DÉFINITION 16. *Soit $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_p\}$ une collection finie de sous-ensembles fermés de Λ . On dira que \mathcal{R} est une partition de Markov pour (Λ, f) si*

- (i) (propres) pour tout $R \in \mathcal{R}$, $R = \overline{\text{int } R}$
- (ii) (partition) $\Lambda = \cup_{R \in \mathcal{R}} R$, et $\text{int } R_i \cap \text{int } R_j = \emptyset$ si $i \neq j$
- (iii) (propriété de Markov) $\text{int } R_i \cap f^{-1} \text{int } R_j \neq \emptyset \implies f(R_i) \supset R_j$.

THÉORÈME 28. *Soit (Λ, f) un répulseur conforme. Alors (Λ, f) possède des partitions de Markov de diamètre arbitrairement petit.*

La preuve repose sur la lemme de pistage et est due à Bowen dans le cas des difféomorphismes hyperboliques. La perte d'inversibilité n'est pas gênante et le fait qu'il n'y ait pas de direction stable simplifie largement les détails techniques. Toutefois cette preuve bien que beaucoup plus simple que celle dans le cas inversible en suit les grandes lignes et en constitue une introduction accessible.

DÉMONSTRATION. Soit $\epsilon > 0$ inférieur à l' ϵ du théorème précédent. Soit $\beta \in (0, \epsilon/2)$. Soit α donné par le théorème précédent. Soit L la constante de Lipschitz de f sur V . Soit $\gamma \geq \max(\delta, (L+1)\beta)$. On supposera β suffisamment petit pour que $\gamma < \delta$, δ étant une constante d'expansivité de f .

Soit $\{x_1, \dots, x_p\} \subset \Lambda$ un ensemble α -dense, c'est-à-dire $\Lambda \subset \cup_{i=1}^p B(x_i, \alpha)$.

Soit A la matrice $p \times p$ de 0 et de 1 définie par

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } d(f(x_i), x_j) < \gamma \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et Σ_A le sous-shift de type fini associé

$$\Sigma_A = \{\omega = (\omega_n)_{n \geq 0} : \forall n \geq 0, A_{\omega_n \omega_{n+1}} = 1\}.$$

Soit $\theta: \Sigma_A \rightarrow \Lambda$ l'application qui à $(\omega_n)_{n \geq 0} \in \Sigma_A$ associe l'unique point $x_* \in \Lambda$ β -pisté par $(x_{\omega_n})_{n \geq 0}$. Soit

$$T_i = \{\theta(\omega) : \omega \in \Sigma_A \text{ et } \omega_0 = i\} \subset \Lambda.$$

La collection $\{T_i\}$ ne sera pas encore la partition recherchée, mais on a déjà plusieurs propriétés intéressantes.

(a) $\Lambda = \cup_i T_i$. Soit $x \in \Lambda$. Pour tout $n \geq 0$ il existe par α -densité de x_1, \dots, x_p un indice $\omega_n \in \{1, \dots, p\}$ tel que $d(f^n x, x_{\omega_n}) < \alpha$. Donc $\omega := (\omega_n)_{n \geq 0} \in \Sigma_A$ et $\theta(\omega) = x$. En particulier $x \in T_{\omega_0}$.

(b) T_i est fermé. Les cylindres $[i] = \{\omega \in \Sigma_A : \omega_0 = i\}$ sont compacts pour la topologie de Σ_A . D'autre part, si $\omega_k = \omega'_k$ pour tout $k = 0, 1, \dots, n$ et $x = \theta(\omega)$, $x' = \theta(\omega')$, on a $d(f^k(x), f^k(x')) \leq 2\beta$ pour tout $k \leq n$. Donc $d(x, x') \leq \lambda^n \epsilon$. Ceci montre que θ est Hölder, en particulier continue. Donc $T_i = \theta([i])$ est compact.

(c) Les T_i vérifient une propriété de Markov :

$$T_i \cap f^{-1}T_j \neq \emptyset \implies f(T_i) \supset T_j.$$

En effet, soit $x \in T_i$ tel que $f(x) \in T_j$. Par définition on a $d(x, x_i) < \beta$ et $d(f(x), x_j) < \beta$. Donc

$$d(f(x_i), x_j) \leq d(f(x_i), f(x)) + d(f(x), x_j) < (L+1)\beta \leq \gamma.$$

Donc $A_{ij} = 1$. Pour tout $y \in T_j$ il existe $\omega \in [j]$ tel que $\theta(\omega) = y$. On a alors $\omega' := i\omega \in \Sigma_A$ et $x = \theta(\omega') \in T_i$. De plus, par expansivité on obtient que $f(x) = y$, car l'orbite de $f(x)$ est $(L+1)\beta$ -pistée par celle de y et $(L+1)\beta \leq \delta$. Donc $f(T_i) \supset T_j$.

On définit alors les fermés $R_i = \overline{\text{int } T_i} \in \Lambda$. On ne garde que ceux qui sont non vides. Ils ont les propriétés suivantes.

(d) R_i est propre. Par définition $\text{int } T_i \subset R_i$ donc $\text{int } T_i \subset \text{int } R_i$ donc $R_i \subset \overline{\text{int } R_i}$. Et bien sûr $\overline{\text{int } R_i} \subset R_i$.

(e) Les R_i vérifient la propriété de Markov. $\text{int } R_i \cap f^{-1} \text{int } R_j \neq \emptyset \implies f(R_i) \supset R_j$.

Soit $x \in \text{int } R_i$ tel que $f(x) \in \text{int } R_j$. On a $x \in T_i$ et $f(x) \in T_j$ donc par (c) $f(T_i) \supset T_j$. D'où $\text{int } T_j \subset \text{int } f(T_i) = f(\text{int } T_i)$ et finalement $\overline{\text{int } T_j} \subset \overline{f(\text{int } T_i)}$ (fermeture et intérieur commutent avec f par inversibilité locale de f , sur un voisinage de T_i).

(f) $\Lambda = \cup_i R_i$. On va montrer que $\cup_i \text{int } T_i$ est dense dans Λ , ce qui sera suffisant. Par (b), T_i est fermé donc $T_i = \text{int } T_i \cup \partial T_i$. Donc par (a)

$$\Lambda = \cup_i T_i = \cup_i \text{int } T_i \cup \cup_i \partial T_i.$$

Mais ∂T_i est un fermé d'intérieur vide, donc $\cup_i \partial T_i$ aussi. Son complémentaire $\cup_i \text{int } T_i$ est donc un ouvert dense dans Λ .

Pour terminer, on prend toutes les intersections possibles $R = \cap_{i=1}^p R'_i$ où R'_i désigne R_i ou $\overline{\Lambda \setminus R_i}$, et on garde uniquement les ensembles R d'intérieur non vide. C'est une partition de Markov. \square

DÉFINITION 17. *Etant donné une partition de Markov $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_r\}$ pour un répulseur (Λ, f) on définit une matrice $r \times r$ de transition par*

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{int } R_i \cap f^{-1} \text{int } R_j \neq \emptyset \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

puis une application $\pi: \Sigma_A \rightarrow \Lambda$ par

$$\{\pi(\omega)\} = \cap_{n \geq 0} f^{-n} R_{\omega_n}.$$

Ceci nous donne un codage de f .

L'intersection est non vide car on a une suite décroissante de fermés non vides et réduite à un singleton car ces ensembles sont de diamètre exponentiellement petit, comme on le voit dans la preuve du théorème précédent, partie (b). Il y est aussi montré que π est Hölder si l'on prend comme métrique $d(\omega, \omega') = e^{-n}$ si les deux suites coïncident sur les n premiers symboles.

Notons que π n'est pas nécessairement inversible. Toutefois,

PROPOSITION 29. *L'application π est surjective, $\pi \circ \sigma = f \circ \pi$, et π^{-1} est bien définie sur l'ensemble résiduel*

$$Y = \Lambda \setminus \cup_{n \geq 0} f^{-n}(\cup_i \partial R_i) \subset \Lambda.$$

DÉMONSTRATION. Si $x \in Y$ on a $\pi^{-1}(x) = (\omega_n)_{n \geq 0}$ avec ω_n l'unique indice tel que $f^n x \in \text{int } R_{\omega_n}$. Y est résiduel comme intersection dénombrable d'ouverts denses, puisque les ensembles formant la partition de Markov sont propres. \square

DÉFINITION 18. *On appelle l'ensemble errant de (Λ, f) l'ensemble W des points $x \in \Lambda$ tels qu'il existe un ouvert $U \ni x$ pour lequel $U \cap f^{-n}U = \emptyset$ pour tout $n \geq 1$. On note Ω son complémentaire, l'ensemble non-errant. Ω est l'ensemble des points d'accumulation des orbites. W est ouvert et Ω fermé.*

On dit que (Λ, f) est topologiquement transitif si pour tout ouverts U et U' non vide il existe un entier $n \geq 1$ tel que $U \cap f^{-n}U' \neq \emptyset$.

On dit que (Λ, f) est topologiquement mélangeant si pour tout ouverts U et U' non vides il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $U \cap f^{-n}U' \neq \emptyset$.

PROPOSITION 30. *Un sous shift de type fini (Σ_A, σ) est topologiquement transitif ssi pour tout couple (i, j) il existe un entier n tel que $(A^n)_{ij} > 0$, et topologiquement mélangeant ssi pour tout couple (i, j) il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $(A^n)_{ij} > 0$. Dans ce dernier cas il existe une puissance de A strictement positive.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de vérifier les conditions d'intersection sur les cylindres car ils engendrent la topologie. \square

PROPOSITION 31. *On a les équivalences suivantes.*

(Σ_A, σ) est topologiquement transitif ssi (Λ, f) l'est.

(Σ_A, σ) est topologiquement mélangeant ssi (Λ, f) l'est.

DÉMONSTRATION. Supposons (Σ_A, σ) transitif. Soient U et U' deux ouverts non vide de Λ . Alors $\pi^{-1}U$ et $\pi^{-1}U'$ sont ouverts non vides. Donc par transitivité il existe n tel que $\pi^{-1}U \cap \sigma^{-n} \pi^{-1}U' \neq \emptyset$. Or $f^n \pi = \pi \sigma^n$ donc $\sigma^{-n} \pi^{-1} = \pi^{-1} f^{-n}$ et en appliquant π sur l'intersection non vide on obtient $U \cap f^{-n}U' \neq \emptyset$.

Réciproquement, si (Λ, f) est transitif, pour tout i, j il existe n tel que l'intersection $\text{int } R_i \cap f^{-n} \text{int } R_j$ soit non vide. Soit x un point de cet ensemble, et ω tel que $\pi(\omega) = x$. Comme $x \in \text{int } R_i$ et $f^n x \in \text{int } R_j$ on a $\omega_0 = i$ et $\omega_n = j$. Donc $(A^n)_{ij} > 0$.

La preuve pour le mélange topologique est similaire. \square

Les sous-shifts de type fini possèdent beaucoup de mesures invariantes, que l'on peut transporter grâce au codage sur Λ .

PROPOSITION 32. *Toute mesure ν sur Σ_A invariante par σ induit une mesure $\mu := \pi^* \nu$ f -invariante sur Λ , définie par $\mu(B) = \nu(\pi^{-1}B)$ pour tout ensemble B mesurable.*

DÉMONSTRATION. L'invariance de μ est vérifiée par

$$\mu(f^{-1}B) = \nu(\pi^{-1}f^{-1}B) = \nu(\sigma^{-1}\pi^{-1}B) = \nu(\pi^{-1}B) = \mu(B).$$

\square

On peut par exemple transporter toutes les mesures de Bernoulli, ou plus généralement de Markov, déjà construite sur Σ_A , qui donneront alors des mesures invariantes par f différentes.