Université de Bretagne Occidentale
L3 Mathématiques parcours mathématiques
Analyse numérique et statistique 2008-2009

**Examen du mercredi 23 juin 2009, 14h–17h**

**Problème. Polynômes osculateurs.**
On se donne $x_0, \ldots, x_n$ des points distincts de $\mathbb{R}$ et une fonction $f$ de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$. On note $\mathbb{P}_N$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $N$.
On appelle $p$ un *polynôme osculateur* de $f$ aux points $x_i$ si

$$\begin{cases} p(x_i) = f(x_i) & \text{pour } i = 0, \ldots, n. \\ p'(x_i) = f'(x_i) & \text{pour } i = 0, \ldots, n. \\ p \in \mathbb{P}_{2n+1} \end{cases}$$

On notera $\pi(x) = \prod_i (x - x_i)$, $\pi_i(x) = \prod_{j \neq i} (x - x_j)$, $\ell_i(x) = \pi_i(x)/\pi_i(x_i)$.

1) Expliquer la différence entre le polynôme osculateur et le polynôme d'interpolation de Lagrange. Quel intérêt cela peut-il avoir ?

2) Commençons par montrer l'unicité du polynôme osculateur : supposons à cet effet que $p$ et $q$ sont deux polynômes osculateurs et notons $r = p - q$.
a) Calculer $r(x_i)$ pour $i = 0, \ldots, n$ et en déduire que $r(x) = \pi(x)s(x)$ pour un certain $s \in \mathbb{P}_n$.
b) Montrer que $r'(x) = s(x) \sum_{k=0}^{n} \pi_k(x) + s'(x)\pi(x)$.
c) Calculer $r'(x_j)$ pour $j = 0, \ldots, n$ et conclure.

3) On considère maintenant le problème de l'existence : posons

$$A_i(x) = (1 - 2(x - x_i)\ell_i'(x_i))\ell_i(x)^2, \quad B_i(x) = (x - x_i)\ell_i(x)^2.$$

a) Montrer que $A_i(x_j) = \delta_{ij}$, $A_i'(x_j) = 0$ pour tous $i, j = 0, \ldots, n$
b) Montrer que $B_i(x_j) = 0$, $B_i'(x_j) = \delta_{ij}$ pour tous $i, j = 0, \ldots, n$
c) Montrer que le polynôme $p(x) = \sum_{i=0}^{n} (f(x_i)A_i(x) + f'(x_i)B_i(x))$ est le polynôme osculateur.

4) Vérifier que $\ell_i'(x_i) = \sum_{k=0,\ k \neq i}^{n} \frac{1}{x_k - x_i}$ pour tout $i = 0, \ldots, n$.

5) Ecrire une fonction *scilab* renvoyant les valeurs du polynôme osculateur aux abscisses contenues dans le vecteur `t`. En entrée on aura les vecteurs `x, y, dy` contenant respectivement les noeuds d'interpolation $x_i$ et les valeurs correspondantes $f(x_i)$ et $f'(x_i)$. *A défaut de connaître suffisement le language scilab on pourra éventuellement utiliser un autre language, voire donner le programme sous forme algorithmique.*

********************

**Exercice II.** Des ampoules dont la durée de vie moyenne est de 750 heures sont entreposées depuis plusieurs années. On craint que ce long séjour n'ait réduit la durée de vie des ampoules. On teste 30 ampoules et on obtient les durées de vie ci-dessous :
745 ; 766 ; 693 ; 721 ; 729 ; 691 ; 687 ; 777 ; 740 ; 714 ; 772 ; 749 ; 700 ; 793 ; 751 ; 799 ; 785 ; 712 ; 688 ; 737 ; 726 ; 706 ; 759 ; 799 ; 718 ; 706 ; 730 ; 766 ; 705 ; 691

On pourra utiliser que la moyenne et l'écart-type empirique des observations sont donnés respectivement par $\bar{x} = 735, 17$ et $s = 34, 55$

1) Quel type de graphique peut-on utiliser pour résumer ce tableau de données ? Faire le graphique.

2) Rappeler les définitions de $\bar{x}$ et $s$. Comment s'interprètent ces quantités ?

3) Donner un intervalle de confiance à 95% pour la durée de vie moyenne des ampoules. On détaillera précisemment le raisonnement mathématique qui permet de construire cet intervalle. Discuter le résultat obtenu.

4) Peut-on supposer que la durée de vie moyenne des ampoules est toujours égale à 750 heures ? On répondra à l'aide d'un test statistique en détaillant le raisonnement mathématique qui permet de construire ce test.

*********************

**Exercice III.** Soit $(X_1, ..., X_n)$ n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, dont la loi de probabilité commune admet la densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{A}{x^{1+1/\theta}} & si\ x \geq 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1) Pour quelles valeurs de $\theta$ la fonction $f$ définit bien une densité ? Montrer alors que $A = \frac{1}{\theta}$.

2) Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $T_n$ de $\theta$.

3) Montrer que $E[ln(X_i)] = \theta$ et en déduire l'information de Fisher apportée par $(X_1, ..., X_n)$ sur $\theta$.

4) Déduire de la question précédente que $var(ln(X_i)) = \theta^2$, puis le biais et la variance de l'estimateur $T_n$. $T_n$ est-il un estimateur efficace de $\theta$ ?

5) Etudier les propriétés asymptotiques de $T_n$.

6) Déduire de la question précédente un intervalle de confiance asymptotique à 95% pour $\theta$.