Université de Bretagne Occidentale **Année 2008-2009**
Master 1 de Mathématiques

Probabilités 2 - Martingales
TD N.2

1. Soit $(X_n)_n$ une sous-martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$. Montrer que $(X_n)_n$ est encore une sous-martingale pour la filtration canonique $(\sigma(X_1,\ldots,X_n))_n$.

2. Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.r. indépendantes, de même espérance m finie. Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que la marche aléatoire $(S_n)_n$ est une sous-martingale, une martingale, une sur-martingale suivant que $m > 0$, $m = 0$, $m < 0$.

3. Soit $(Z_n)_n$ une suite de v.a.r. indépendantes de même loi donnée par : $P(Z_n = 1) = p, P(Z_n = -1) = 1-p$. On pose $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1,\ldots,Z_n)$ pour $n \geq 1$. Soit $(b_n)_n$ une suite de v.a. positives bornées, telle que b_n soit $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable pour tout $n \geq 1$. On définit un jeu en décidant que si $Z_n = 1$, on gagne b_n, et si $Z_n = -1$, on perd b_n (b_n représente la mise décidée en fonction des parties précédentes). Soit S_0 la fortune initiale, S_n la la fortune après le n-ième coup. Montrer que $(S_n)_n$ est une martingale si $p = 1/2$, une sous-martingale si $p > 1/2$, une sur-martingale si $p < 1/2$.

4. Soit $(X_n)_n$ une sur-martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$ et soit $(b_n)_n$ une suite de v.a. positives bornées telle que b_n soit $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable pour tout $n \geq 1$ et b_0 constante.
(a) On pose $Z_0 = X_0$, et pour $n \geq 1$, $Z_n = X_n - X_{n-1}$. Montrer que la suite $Y_n = b_0Z_0 + \cdots + b_nZ_n$ est une sur-martingale.
(b) Soit T un temps d'arrêt adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$. Montrer que le processus $(X_{T\wedge n})_n$ arrêté à l'instant T est une sur-martingale. (*On posera* $b_n = 1_{\{T\geq n\}}$.)

5. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et S, T deux temps d'arrêt adaptés à une filtration $(\mathcal{F}_n)_n$.
(a) Montrer que si $T \equiv n$ alors $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_n$.
(b) Montrer que $S \wedge T = \min(S,T)$, $S \vee T = \max(S,T)$, $S + T$ sont des temps d'arrêt.
(c) Soient $X = (X_n)_n$ un processus et B un borélien de $\mathbb{R}$. Montrer que le temps d'entrée T du processus X dans B, c'est-à-dire le plus petit entier n tel que $X_n \in B$ est un temps d'arrêt adapté à la filtration canonique de X.
(d) Montrer que les hypothèses du théorème de l'échantillonnage sont bien vérifiées dans les deux cas cités en remarque dans le cours.

6. (Identité de Wald. Franchissement de barrières.) Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.r. indépendantes de même loi $p\delta_1 + q\delta_{-1} + r\delta_0$ ($0 \leq p,q,r < 1$, $p+q+r = 1$), où δ_x désigne la masse de Dirac au point x. On pose $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour $n \geq 1$, et soient a et b deux entiers vérifiant $a < 0 < b$.
(a) On pose $T = \inf\{n \geq 0 \colon S_n \notin]a,b[\}$. Montrer en utilisant par exemple le théorème limite central que T est un temps d'arrêt p.s. fini.
(b) Soit λ un réel et $\phi(\lambda) = pe^{\lambda} + qe^{-\lambda} + r$. Montrer que la suite $Y_n = e^{\lambda S_n}\phi(\lambda)^{-n}$ est une martingale.
(c) Soit λ tel que $\phi(\lambda) \geq 1$. Montrer que $E(e^{\lambda S_T}\phi(\lambda)^{-T}) = 1$. (*appliquer le théorème de l'échantillonnage aux temps d'arrêt* $T_1 = 1$ *et* $T_2 = T$.)
On suppose désormais que $p = q = 1/2$.
(d) Calculer $E(S_T)$, $P(S_T = a)$, $P(S_T = b)$.
(e) Soit $\alpha > 1$. Calculer $\int_{\{S_T=a\}} \alpha^{-T}dP$ et $\int_{\{S_T=b\}} \alpha^{-T}dP$. (*On pourra utiliser l'équation* $\phi(\pm\lambda) = \alpha$.)
(f)* Calculer $E(T|S_T)$ et $E(T)$.

7. Soit $X = (X_n)$ une sous-martingale et T un temps d'arrêt adapté à la filtration canonique $(\mathcal{F}_n)_n$ de X tel que $T \geq 1$ et $E(T) < +\infty$. On suppose que sur l'ensemble $\{T \geq n+1\}$, on a $E(|X_{n+1} - X_n||\mathcal{F}_n) \leq \alpha < +\infty$.

(a) Soit $Y = \sum_{k=1}^{T} |X_{k+1} - X_k|$. Montrer que $|X_n| \leq Y + |X_0|$ sur $\{T > n\}$ et que $E(Y) < +\infty$.

(b) en déduire que $E(X_T) \geq E(X_1)$. (*On montrera que* (X_1, X_T) *est une sous-martingale.*)

8. Soit $(U_n)_n$ une suite de v.a.r. indépendantes de même loi, avec $E(|U_1|) < \infty$. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = U_1 + \cdots + U_n$; soit $T \geq 1$ un temps d'arrêt adapté à la filtration canonique.

(a) Montrer que si $E(T) < \infty$ alors $E(S_T) = E(U_1)E(T)$.

(b) On suppose que $U_n = \pm 1$ avec probabilité $1/2$, et on prend $T = \inf\{n \geq 1 \colon S_n > 0\}$. Montrer par l'absurde que $E(T) = +\infty$.