Université de Bretagne Occidentale **Année 2008-2009**
Master 1 de Mathématiques

Probabilités 2 - Convergence des martingales
TD N.3

1. *Martingale fermée.* Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.r. et Y une v.a.r. intégrable. Soit $Y_n = E(Y|X_1, \ldots, X_n)$. Montrer que $(Y_n)_n$ est une martingale équi-intégrable et que $Y_n \to E(Y|X_1, X_2, \ldots)$ p.s. et dans L^1.

2. *Une preuve de la loi 0-1 de Kolmogorov.* Soit (X_n) une suite de v.a.r. indépendantes, et $\mathcal{C}_\infty$ sa tribu asymptotique. Soit $C \in \mathcal{C}_\infty$. Montrer que $E(1_C|\mathcal{F}_n) = P(C)$ pour tout n, où $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Montrer par ailleurs que $\lim_n E(1_C|\mathcal{F}_n) = 1_C$ p.s., et en déduire que $P(C) = 0$ ou $P(C) = 1$.

3. (a) Soit (X_n) une martingale bornée dans L^2. Montrer que

$$\sup_n E(|X_n|) < \infty$$

et en conclure que X_n converge p.s. et dans L^1 vers une limite X.

(b) *Signes aléatoires.* Soit (Z_n) une suite de v.a. indépendantes avec $P(Z_n = 1) = P(Z_n = -1) = 1/2$. Soit (α_n) une suite de réels. Montrer que la série $\sum_n \alpha_n Z_n$ converge p.s. dès que la série $\sum_n \alpha_n^2$ converge.

4. (a) Soit (X_n) une suite i.i.d. de v.a. positives vérifiant $E(X_1) = 1$. Montrer que $R_n = \Pi_{i=1}^n X_i$ est une martingale.

(b) On suppose que $P(X_1 = 0) = P(X_1 = 2) = 1/2$. Calculer la limite de (X_n) p.s. A-t-on convergence dans L^1 ?

5. *Ensemble de convergence d'une martingale.*

(a) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une sous-martingale telle que

$$E(\sup_{n\geq 0}(X_n - X_{n-1})^+) < \infty,$$

avec $X_{-1} = 0$ et $x^+ = \max(x, 0)$. Soit $(\hat{X}_n)$ le processus arrêté dans $[a, +\infty[$, $a \geq 0$, i.e. $\hat{X}_n = X_{T\wedge n}$, où $T = \min\{n \geq 0 \colon X_n \geq a\}$ ou $+\infty$ si $X_n < a$ pour tout n. Montrer que $E(|\hat{X}_n|)$ est bornée.

(b) Soit $(\hat{X}_n)_{n\geq 0}$ une martingale telle que $E(\sup_{n\geq 0} |X_n - X_{n-1}|) < +\infty$, avec $X_{-1} = 0$. On pose

$$A_1 = \{\omega \in \Omega \colon \lim_n X_n(\omega) \text{ existe et est finie}\},$$
$$A_2 = \{\omega \colon \liminf_n X_n(\omega) = -\infty \text{ et } \limsup_n X_n(\omega) = +\infty\}.$$

Montrer que $A_1 \cup A_2 = \Omega$ p.s. (Indication : si $F = \{\limsup_n X_n < +\infty\}$, on pourra remarquer que $F = \{\exists a \geq 0, \forall n \geq 0, X_n < a\}$ pour en déduire en utilisant (a) que $F \subset A_1$ p.s.)

6. *Marche aléatoire de Bernoulli.* On utilisera le résultat de (5.b).

(a) Soit (Y_n) une suite de v.a.r. indépendantes centrées, telles que $|Y_n| \leq \alpha < \infty$ pour tout $n \geq 1$. On pose $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Montrer que l'on a soit

$$P(\lim_n S_n \text{ existe et est finie}) = 1,$$

soit

$$P(\limsup_n S_n = +\infty \text{ et } \liminf_n = -\infty) = 1.$$

On suppose maintenant que les v.a.r. Y_n ont même loi et que l'on n'a pas $Y_n = 0$ p.s.

(b) Montrer que $P(\limsup_n S_n = +\infty \text{ et } \liminf_n S_n = -\infty) = 1$.

(c) Dans le cas où $Y_n = \pm 1$ avec probabilité $1/2$, montrer que pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $P(\limsup_n \{S_n = a\}) = 1$.

(d) Soit $T = \inf\{n \colon S_n > 0\}$. Montrer que T est un temps d'arrêt p.s. fini.

7. *Le théorème de Radon-Nikodym par les martingales.* Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On suppose que $\mathcal{A}$ est engendrée par une suite d'événements $(A_1, A_2, \ldots)$. Soit P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et Q une mesure positive finie sur le même espace et absolument continue par rapport à P.

a) Pour tout $n \geq 1$, on pose $\mathcal{B}_n = \sigma(A_1, \ldots, A_n)$. Montrer qu'il existe une partition finie $(A_{n,i})_{1 \leq i \leq r_n}$ de Ω engendrant la tribu $\mathcal{B}_n$. On pose

$$X_n = \sum_{i=1}^{r_n} \frac{Q(A_{n,i})}{P(A_{n,i})} 1_{A_{n,i}},$$

où l'on donne la valeur 0 aux rapports de la forme $\frac{0}{0}$.

b) Montrer que pour tout $m \geq n$ et $A \in \mathcal{B}_n$ on a $E(X_m 1_A) = Q(A)$.

c) En déduire que (X_n) est une martingale.

d) En considérant $A = \{X_n > c\}$ dans (b) et en utilisant le fait que $Q \ll P$ montrer que (X_n) est équi-intégrable.

e) Montrer qu'il existe une var X P-intégrable telle que $Q(A) = \int_A X dP$ pour tout $A \in \mathcal{A}$. On note $X = \frac{dQ}{dP}$; X est la densité de Q par rapport à P.