Une preuve simple d'un résultat de Dufresne

Ismael Bailleul

Université Paris Sud, ismael.bailleul@math.u-psud.fr

On donne dans cette note une démonstration simple du résultat suivant de Dufresne, [Duf90].

1 Le résultat de Dufresne

THÉORÈME **1.1.** *Soit* $\{w_s\}_{s\geq 0}$ *un mouvement Brownien réel et* c *une constante* > 0*. On a quels que soient* $0 \leq a \leq b \leq \infty$

$$\mathbb{P}\Big(\int_0^\infty e^{-w_s - cs}\, ds \in [a, b[\Big) = \frac{2^{2c}}{\Gamma(2c)} \int_a^b \frac{e^{-2/u}}{u^{1+2c}} du.$$

Remarque – $\int_0^\infty e^{-w_s-cs}\, ds$ a même loi que $\dfrac{2}{\gamma_{2c}}$, où γ_{2c} est une variable aléatoire de loi gamma, de paramètre $2c$.

$\lhd$ Etant donnés $y > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$, considérons la diffusion $\big\{(y_s, \xi_s)\big\}_{s\geq 0}$ sur $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$ solution des équations différentielles stochastiques

$$\begin{aligned} dy_s &= y_s dw_s + \left(c + \frac{1}{2}\right) y_s\, ds, \\ d\xi_s &= \frac{ds}{y_s}, \end{aligned} \tag{1}$$

où w est un mouvement brownien, avec pour valeurs initiales $y \in \mathbb{R}_*^+$ et $\xi \in \mathbb{R}$. L'équation de $\{y_s\}_{s\geq 0}$ s'intègre explicitement.

$$y_s = y\, e^{w_s + cs},$$

et

$$\xi_s = \xi + \int_0^s e^{-w_r - cr}\, dr.$$

Notons $\mathbb{P}_{y,\xi}$ la loi de la diffusion $\big\{(y_s, \xi_s)\big\}_{s\geq 0}$. Le processus $\{\xi_s\}_{s\geq 0}$ admet $\mathbb{P}_{y,\xi}$-presque sûrement une limite finie

$$\xi_\infty = \xi + \frac{1}{y} \int_0^\infty e^{-w_r - cr}\, dr$$

lorsque $s \to +\infty$. Si θ_r désigne le shift usuel sur les trajectoires de la diffusion (y, ξ), quel que soit $r > 0$, on a $\mathbb{P}_{y,\xi}$-presque sûrement

$$\xi_\infty \circ \theta_r = \xi_\infty.$$

Notons $G(t) \equiv \mathbb{P}\left(\int_0^\infty e^{-w_r - cr}\, dr \geq t\right)$. Soit $A \in \mathbb{R}$. On a

$$\mathbb{P}_{y,\xi}(\xi_\infty \geq A) = \mathbb{P}_{y,\xi}\left(\xi + \frac{1}{y}\int_0^{+\infty} e^{-w_r - cr}\, dr \geq A\right) = G\big(y(A - \xi)\big).$$

Si l'on arrive à justifier par un argument a priori que la fonction

$$F_{\geq A}(y, \xi) \equiv \mathbb{P}_{y,\xi}(\xi_\infty \geq A)$$

est de classe $\mathcal{C}^2$, ou que G est de classe $\mathcal{C}^2$, la fonction $F_{\geq A}$ vérifiera l'équation différentielle

$$\left(\frac{y^2}{2}\partial_y^2 + \left(c + \frac{1}{2}\right) y\, \partial_y + \frac{\partial_\xi}{y}\right) F_{\geq A} = 0, \tag{2}$$

par la formule d'Itô, du fait que le processus $\left\{F_{\geq A}(y_t, \xi_t)\right\}_{t \geq 0}$ est une martingale. L'équation (2) devient pour G

$$\frac{\big(y(A-\xi)\big)^2}{2}\, G''\big(y(A-\xi)\big) + \left(\left(c + \frac{1}{2}\right) y(A - \xi) - 1\right) G'\big(y(A-\xi)\big) = 0, \tag{3}$$

soit

$$G''(r) + \left(\frac{1+2c}{r} - \frac{2}{r^2}\right) G'(r) = 0.$$

On la résout explicitement :

$$G'(r) = C\, \frac{e^{-2/r}}{r^{1+2c}} \mathbf{1}_{r>0},$$

pour une certaine constante C que l'on identifie avec la condition $G(0) = 1$. Cela donne la formule de l'énoncé. $\triangleright$

On aura donc établi l'identité de Dufresne si l'on arrive à justifier a priori le caractère $\mathcal{C}^2$ de la fonction de répartition de la variable aléatoire $\int_0^\infty e^{-w_u - cu}\, du$, ou de la fonction $F_{\geq A}$. Ce dernier point peut s'obtenir de l'hypoellipticité du générateur L de la diffusion à l'aide du théorème de Hörmander. Il semble cependant raisonnable de se passer d'un outil si puissant dans notre cadre simple. On donne dans la section suivante une preuve directe du premier point, basée sur une formule d'intégration par parties.

2 Régularité de la loi de la variable aléatoire $\int_0^\infty e^{w_u - cu}\, du$

On démontre une formule d'intégration par parties inspirée du calcul de Malliavin. On trouvera ce calcul développé à un niveau élémentaire dans les livres de Bell et Bass, [Bel87], [Bas98] (dernier chapître), ou dans celui de Nualart [Nua06], et dans une bien plus grande généralité, dans le livre de Malliavin [Mal97].

La formule d'intégration par parties tire ici son intérêt d'un fait élémentaire bien connu (voir par exemple le livre [Bas98] de Bass, Chap.8, proposition 3.1).

PROPOSITION **2.1.** *Soit ν une probabilité sur $\mathbb{R}$ et $k \geqslant 2$ un entier. Supposons qu'il existe une constante $C_k > 0$ telle que l'inégalité*

$$\left| \int \phi^{(k)}(x)\nu(dx) \right| \leqslant C_k \|\phi\|_\infty$$

est vérifiée quelle que soit la fonction ϕ de classe $\mathcal{C}^\infty$, bornée, ainsi que toutes ses dérivées. Alors ν admet une densité de classe $\mathcal{C}^{k-2}$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

On va tirer partie de l'écriture suivante

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{w_r - c\,r}\,dr &= \int_0^1 e^{(w_r - r\,w_1)+(w_1-c)r}\,dr + e^{-c}e^{w_1}\int_1^\infty e^{(w_r-w_1)-c(r-1)}\,dr \\ &= \int_0^1 e^{\mathfrak{p}_r+(w_1-c)r}\,dr + e^{-c}e^{w_1}\int_0^\infty e^{\widetilde{w}_r - cr}\,dr, \end{aligned} \tag{4}$$

dans laquelle $\int_0^\infty e^{w_r-c\,r}\,dr$ apparaît comme une fonctionnelle du pont brownien

$$\{\mathfrak{p}_r\}_{0\leq r\leq 1} = \{w_r - rw_1\}_{0\leq r\leq 1},$$

de w_1, et du mouvement brownien

$$\{\widetilde{w}_r\}_{r\geq 0} = \{w_{r+1} - w_1\}_{r\geq 0}.$$

Ces trois processus sont indépendants sous $\mathbb{P}$. On notera dorénavant

$$\Omega = \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big) \times \mathbb{R} \times \mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}),$$

qu'on munit de la tribu produit des tribus boréliennes de chaque facteur, et sur lequel on met la probabilité

$$\mathbb{Q} = \mathbf{P}^{[0,1]} \otimes \mathbb{W} \otimes \widetilde{\mathbb{P}},$$

où $\mathbf{P}^{[0,1]}$ est la mesure du pont brownien sur $\mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$, $\mathbb{W}$ une loi normale centrée, réduite, et $\widetilde{\mathbb{P}}$ la mesure de Wiener sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$. On notera $\omega = (\mathfrak{p}, w_1, \widetilde{w})$ un élément de Ω, et w le brownien reconstruit à l'aide de $\mathfrak{p}$, w_1, $\widetilde{w}$.

Pour ne pas charger l'écriture, on prendra $c = 1$. On va montrer que la variable aléatoire $\int_0^\infty e^{w_u-u}\,du$ a une densité de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Il n'y a bien entendu aucune difficulté à transposer ce qui suit à la variable aléatoire $\int_0^\infty e^{-w_u-cu}\,du$, $c > 0$, qu'on a rencontré dans la première partie.

Les acteurs et leurs qualités

Les quantités suivantes vont nous intéresser.

- $X(\omega) = \int_0^\infty e^{w_s-s}ds$,
- Pour $k \geq 1$, $X^{(k)}(\omega) = \int_0^1 u^k\, e^{\mathfrak{p}_u+(w_1-1)u}\,du + e^{w_1-1}\int_0^\infty e^{\widetilde{w}_r-r}\,dr$
- $F(\omega) = \frac{1}{X^{(1)}(\omega)}$.

ϕ désignera une fonction lisse dont toutes les dérivées sont bornées.

On écrira dans la suite $\mathbb{L}^p$ pour $\mathbb{L}^p\big(\mathbb{Q}(dw)\big)$, et l'on écrira toujours $\mathbb{E}$ l'espérance sous la probabilité $\mathbb{Q}$.

Pour $\widetilde{\mathbb{P}}$-presque tout $\widetilde{w}$ et tout $\mathfrak{p}$, les fonctions $X(\mathfrak{p},.,\widetilde{w})$ et $F(\mathfrak{p},.,\widetilde{w})$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. Les dérivées de $X(\mathfrak{p},.,\widetilde{w})$ sont les $X^{(k)}(\mathfrak{p},.,\widetilde{w})$ et celles de $F(\mathfrak{p},.,\widetilde{w})$ sont explicites :

$$F^{(1)}(\mathfrak{p},.,\widetilde{w}) = -\big(X^{(2)}F^2\big)(\mathfrak{p},.,\widetilde{w}),$$
$$F^{(2)}(\mathfrak{p},.,\widetilde{w}) = -\big(2F^{(1)}X^{(2)}F + F^2X^{(3)}\big)(\mathfrak{p},.,\widetilde{w}),$$

et ainsi de suite. On écrira par exemple

$$\partial_{w_1}\big(\phi(X)F\big) = X^{(1)}\phi'(X)F + \phi(X)F^{(1)} = \phi'(X) + \phi(X)F^{(1)}.$$

PROPOSITION **2.2.** *1. $X \in \mathbb{L}^p$, pour tout $1 \leq p < 2$. Comme $0 \leq X^{(k)} \leq X$, on a $X^{(k)} \in \mathbb{L}^p$, pour tout $1 \leq p < 2$.*

2. $F \in \mathbb{L}^p$, quel que soit $p \geq 1$. Toutes ses dérivées par rapport à w_1 sont aussi dans tous les espaces $\mathbb{L}^p$, $p \geq 1$.

$\lhd$ *1.* Soit $0 < a < 1$ une constante. La fonction $e^{w_r - r}$ est intégrable sur $(0,+\infty($ sur un événement de probabilité 1. On peut appliquer sur cet événement l'inégalité de Jensen à la fonction $\frac{1}{a}e^{w_r-(1-a)r}$ et la probabilité $ae^{-ar}\mathbf{1}_{r>0}$; on obtient

$$\left(\int_0^\infty e^{w_r-r}\,dr\right)^p = \left(\int_0^\infty \frac{e^{w_r-(1-a)r}}{a}ae^{-ar}\,dr\right)^p \leq a^{1-p}\int_0^\infty e^{pw_r-(1-a)pr}e^{-ar}\,dr.$$

On a ainsi

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty e^{w_r-r}\,dr\right)^p\right] \leq a^{1-p}\int_0^\infty e^{\frac{p^2r}{2}-\big((1-a)p+a\big)r}\,dr < \infty,$$

si

$$\frac{p^2}{2} < (1-a)p + a. \tag{5}$$

Comme on peut trouver pour tout $p < 2$ une constante $0 < a < 1$ assez petite pour que la condition (5) ait lieu, le résultat s'ensuit.

2. Estimons $\mathbb{Q}\big(F(w) > r\big)$.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{Q}\big(F(w) > r\big) = \mathbb{Q}\left(\int_0^1 u\,e^{\mathfrak{p}_u+(w_1-1)u}\,du + e^{w_1-1}\int_0^\infty e^{\widetilde{w}_u-u}\,du < \frac{1}{r}\right)\\
&\leq \mathbb{Q}\left(e^{w_1}\int_0^\infty e^{\widetilde{w}_u-u}\,du < \frac{e}{r}\right) \leq \mathbb{Q}\left(e^{w_1}\int_0^1 e^{\widetilde{w}_u-u}\,du < \frac{e}{r}\right)\\
&\leq \mathbb{Q}\left(e^{w_1}\int_0^1 e^{\widetilde{w}_u-u}\,du < \frac{e}{r}\,;\ \inf_{u\in[0,1]}\widetilde{w}_u \geq -\frac{\ln r}{2}\right) + \mathbb{Q}\left(e^{w_1}\int_0^1 e^{\widetilde{w}_u-u}\,du < \frac{e}{r}\,;\ \inf_{u\in[0,1]}\widetilde{w}_u < -\frac{\ln r}{2}\right)\\
&\leq \mathbb{Q}\left(e^{w_1}\int_0^1 e^{\frac{-\ln r}{2}-u}\,du < \frac{e}{r}\,;\ \inf_{u\in[0,1]}\widetilde{w}_u \geq -\frac{\ln r}{2}\right) + \mathbb{Q}\left(\inf_{u\in[0,1]}\widetilde{w}_u < -\frac{\ln r}{2}\right)\\
&\leq \mathbb{Q}\left(w_1 \leq -\frac{\ln r}{2} + \mathrm{Cte}\right) + 2\,\mathbb{Q}\left(\widetilde{w}_1 \geq \frac{\ln r}{2}\right).
\end{aligned} \tag{6}$$

Ces deux termes sont du même ordre de grandeur : $\frac{1}{r^{\frac{\ln(r)}{8}}\ln(r)}$.

Cette fonction de r décroît assez vite pour qu'on ait quel que soit $p \geqslant 1$

$$\mathbb{E}[F^p] = \int_0^\infty r^{p-1}\mathbb{P}(F > r)dr < \infty.$$

Pour ce qui est des dérivées de F, on traîte le cas de $F^{(1)}$ et $F^{(2)}$, les dérivées d'ordre supérieur se traîtant de la même façon.
De l'inégalité presque sûre

$$0 \leq X^{(2)} F = \frac{X^{(2)}}{X^{(1)}} \leq 1,$$

on tire

$$|X^{(2)} F^2| \leq F,$$

d'où il vient que $F^{(1)} = -X^{(2)}(\omega) F(\omega)^2$ est dans tous les espaces $\mathbb{L}^p$, $p \geq 1$.
De même, puisque $X^{(3)}(\omega) F(\omega) = \frac{X^{(3)}(\omega)}{X(\omega)} \leq 1$, la variable aléatoire $F^2 X^{(3)}$ se trouve dans tous les espaces $\mathbb{L}^p$. On sait en outre que

$$0 \leqslant X^{(2)} F \leqslant 1,$$

et

$$F^{(1)} \in \mathbb{L}^p, \ \forall p \geqslant 1.$$

Ainsi, $F^{(2)} = -2F^{(1)} X^{(2)} F - F^2 X^{(3)}$ est dans tous les $\mathbb{L}^p$, $p \geq 1$. $\triangleright$

THÉORÈME **2.1.** *Soit ϕ une fonction lisse, dont toutes les dérivées sont bornées. Chacun des membres de l'égalité est bien défini et l'on a*

$$\mathbb{E}\big[w_1 \, \phi(X) F\big] = \mathbb{E}\big[\partial_{w_1}\big(\phi(X) F\big)\big]. \tag{7}$$

$\triangleleft$ w_1 et F appartenant à tous les espaces $\mathbb{L}^p$, $w_1 \, F$ est intégrable. $\phi(X)$ est bornée. Le théorème de Fubini et la formule d'intégration par parties pour une loi normale sur $\mathbb{R}$, centrée, réduite, $\mathcal{N}(dw_1)$, nous permettent alors d'écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[w_1 \, \phi(X) F] &= \mathbb{P}^{[0,1]} \otimes \widetilde{\mathbb{P}}\Big(\int w_1 \phi(X(\mathfrak{p}, w_1, \widetilde{w})) F(X(\mathfrak{p}, w_1, \widetilde{w})) \, \mathcal{N}(dw_1) \Big) \\
&= \mathbb{P}^{[0,1]} \otimes \widetilde{\mathbb{P}}\Big(\int \partial_{w_1}\big(\phi(X(\mathfrak{p}, w_1, \widetilde{w})) F(X(\mathfrak{p}, w_1, \widetilde{w}))\big) \, \mathcal{N}(dw_1) \Big) \\
&= \mathbb{E}\big[\partial_{w_1}\big(\phi(X) F\big)\big]
\end{aligned}$$

$\triangleright$

Comme $\partial_{w_1}\big(\phi(X) F\big) = X^{(1)} \phi'(X) F + \phi(X) F^{(1)} = \phi'(X) + \phi(X) F^{(1)}$, le théorème a le corollaire suivant, dans lequel on n'a besoin que d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ pour appliquer ce qui précède.

COROLLAIRE **2.1.** *Il existe une constante $C_1 > 0$ telle que l'inégalité suivante est vraie pour toute fonction bornée $\phi \in \mathcal{C}^1$, ayant sa dérivée bornée.*

$$\big|\mathbb{E}\big[\phi'(X)\big]\big| \leqslant C_1 \|\phi\|_\infty.$$

Pour obtenir le même genre d'estimations avec la dérivée seconde $\phi^{(2)}$ de ϕ au lieu de ϕ', on applique la formule d'integration par parties à $\phi'(= \phi^{(1)})$ pour obtenir

$$\mathbb{E}\big[\phi^{(2)}(X)\big] = \mathbb{E}\big[\phi^{(1)}(X) \big\{F w_1 - F^{(1)}\big\}\big]. \tag{8}$$

Notons $K = F w_1 - F^{(1)}$. Comme F et w_1 sont dans tous les espaces $\mathbb{L}^p$, $F w_1$ est aussi dans tous les espaces $\mathbb{L}^p$, ainsi que K. Il en va de même de KF, qui est pour $\widetilde{\mathbb{P}}$-presque tout $\widetilde{w}$ et tout $\mathfrak{p}$ une fonction lisse de w_1, de dérivée

$$\partial_{w_1}(KF) = K^{(1)}F + KF^{(1)}.$$

Pour estimer $\mathbb{E}[\phi'(X)K]$, on applique la formule d'intégration par parties non pas à la fonctionnelle $\phi(X)F$, mais à $\phi(X)KF$.

L'utilisation de la formule est justifiée comme dans la démonstration du théorème. Cela donne

$$\mathbb{E}\big[\phi'(X)K\big] = \mathbb{E}\big[\phi(X)\big\{KF\,w_1 - \partial_{w_1}(KF)\big\}\big]. \tag{9}$$

On a donc

$$\mathbb{E}[\phi'(X)K] \leq \|\phi\|_\infty \, \|KF\,w_1 - \partial_{w_1}(KF)\|_{\mathbb{L}^1}.$$

On déduit de (8) qu'on peut trouver une constante C_2 telle que

$$\big|\mathbb{E}\big[\phi^{(2)}(X)\big]\big| \leqslant C_2\|\phi\|_\infty.$$

Pour obtenir une telle estimation avec $\phi^{(3)}(X)$, on applique la formule d'intégration par parties à la fonctionnelle $\phi(X)w_1F^2K$; puis, pour obtenir le théorème suivant, à la fonctionnelle $\phi(X)(w_1F)^2FK$.

Théorème **2.2.** *Il existe d'une constante C_4 telle que l'on a pour toute fonction bornée ϕ, dont toutes les dérivées sont bornées,*

$$\big|\mathbb{E}\big[\phi^{(4)}(X)\big]\big| \leqslant C_4\|\phi\|_\infty. \tag{10}$$

Comme on l'a vu au lemme 2.1, cette inégalité implique que la loi de $X(w)$ a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, de classe $\mathcal{C}^2$. L'équation (3)([1]) qui permet son identification nous montre que cette densité est en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$. On pourrait obtenir cela en itérant indéfiniment la formule d'intégration par parties.

3 Remarques

1. On trouvera dans les articles de Dufresne [Duf90], proposition 4.4.4, Yor [Yor92], [CPY01], théorème 3.1, et Matsumoto & Yor [MY05a], p.335, (ainsi que dans les références données juste avant le théorème dans l'article de Matsumoto et Yor), d'autres démonstrations de ce résultat, d'inspirations très différentes.

   • Dans [Yor92], la loi de $\int_0^{+\infty} e^{w_u - cu}\,du$ est identifiée à la loi du dernier temps de passage d'un processus de Bessel, issu de 0, de dimension $2(1+c)$; le résultat de Dufresne provient alors d'un résultat de Getoor identifiant cette loi comme celle d'un multiple de l'inverse d'une loi gamma, de paramètre $2c$.

   • Dans [CPY01], la loi μ de l'intégrale de Dufresne est identifiée comme la probabilité stationnaire d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck de générateur explicite. La résolution d'une équation de type $L^*\mu = 0$ permet d'obtenir μ.

   • Dans [MY05a], théorème 6.2, c'est l'utilisation de la transformée de Laplace et de fonctions de Bessel qui donnent le résultat.

   La démonstration que l'on propose a l'avantage d'être automatique et de ne demander aucun effort, dès lors que l'on sait que la densité de la loi de l'intégrale de Dufresne admet une densité de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport à la mesure de Lebesgue. On aurait pu utiliser une formule d'intégration par parties obtenue en perturbant tout le chemin w par une fonction convenable,

[1] Où l'on prend $c = 1$

comme on le fait usuellement pour montrer de tels résultats. On aurait alors eu affaire à des dérivées de Fréchet de fonctionnelles à valeur dans des espaces $\mathbb{L}^p$ là où l'on a eu des dérivées usuelles. Cette démonstration évitant le recours à des espaces de dimension infinie est peut-être plus facile à appréhender.

De nombreux résultats sur les lois des fonctionnelles $\int_0^t e^{-w_u - cu}\, du$ et $\int_0^\infty e^{-w_u - cu}\, du$ se trouvent dans [MY05a] et [MY05b].

2. Cette démonstration trouve ses origines dans l'étude d'une diffusion sur $\mathbb{H} \times \mathbb{R}^3$. Dessinons ce cadre.

Notation : $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ et ξ^0, ξ^1, ξ^2 les coordonnées sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

Munissons l'espace vectoriel $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ de la forme quadratique Lorentzienne

$$q(\xi) = (\xi^0)^2 - \big((\xi^1)^2 + (\xi^2)^2\big).$$

L'ensemble $\{\xi \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \ ; \ q(\xi) = 1\}$ est un hyperboloïde à deux nappes. Notons $\mathbb{H}$ celle qui correspond aux $\xi^0 > 0$. Bien que la forme quadratique q ne soit pas définie positive, sa restriction à chaque plan tangent de $\mathbb{H}$ est définie négative. Cela fait de $\mathbb{H}$ une variété riemannienne. Il s'agit là de l'un des modèles de l'espace hyperbolique de dimension 2.

Soit $\{\dot{\xi}_s\}_{s \geq 0}$ un mouvement brownien sur $\mathbb{H}$. Définissons

$$\xi_s = \xi_0 + \int_0^s \dot{\xi}_u\, du$$

et considérons la diffusion $\big\{(\dot{\xi}_s, \xi_s)\big\}_{s \geq 0}$ sur $\mathbb{H} \times \mathbb{R}^3$. Dans ce décor, on s'est intéressé au problème suivant. **Déterminer la tribu invariante $Inv\big((\dot{\xi}, \xi)\big)$ de la diffusion $\{(\dot{\xi}_s, \xi_s)\}_{s \geq 0}$.** On appréhende mieux le problème en prenant pour carte sur $\mathbb{H}$ les coordonnées du demi-espace. Munissons le demi-espace $\{(y, x) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}\}$ de la métrique hyperbolique $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. L'application suivante est une isométrie entre $(\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}, ds^2)$ et $(\mathbb{H}, q)$.

$$\psi \ : \ (y, x) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \mapsto \left(\frac{x^2 + y^2 + 1}{2y}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{2y}, \frac{x}{y} \right) \in \mathbb{H}. \tag{11}$$

Dans les coordonnées (y, x) du demi-espace, le mouvement brownien sur $\mathbb{H}$ est solution d'équations différentielles stochastiques simples.

$$\begin{aligned} dy_s &= y_s dw_s^y, \\ dx_s &= y_s dw_s^x, \end{aligned}$$

où w^y et w^x sont deux mouvements browniens réels indépendants. On voit sur ces équations que $\{y_s\}_{s \geq 0}$ tend vers 0 et que $\{x_s\}_{s \geq 0}$ converge vers une variable aléatoire $x_\infty \in Inv\big(\dot{\xi}\big) \subset Inv\big((\dot{\xi}, \xi)\big)$. Il est naturel, pour trouver d'autres quantités qui convergent le long des trajectoires de la diffusion $\big\{(\dot{\xi}_s, \xi_s)\big\}_{s \geq 0}$, de conditionner par x_∞ et de regarder la diffusion conditionnée. Cette entreprise est facilitée par la présence de nombreuses symétries qui permettent de ramener cette étude à celle de la diffusion conditionnée par l'évènement (de probabilité nulle) $\{|x_\infty| = +\infty\}$. Le processus $\{(\dot{\xi}_s, \xi_s)\}_{s \geq 0}$ est alors solution du système

$$\begin{aligned} dy_s &= y_s dw_s^y + y_s ds, \\ dx_s &= y_s dw_s^x, \\ d\xi_s &\equiv \dot{\xi}_s \, ds = \psi\big((y_s, x_s)\big)\, ds. \end{aligned} \tag{12}$$

où w^y et w^x sont deux mouvements browniens réels indépendants. Notons $\mathbb{P}_{(y,x),\xi}$ la loi de la solution du système (12), ayant pour conditions initiales $\big((y,x),\xi\big) \in (\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3$. L'équation donnant y_s s'intègre explicitement : $y_s = y\, e^{w_s^y + \frac{s}{2}}$.
Intéressons-nous à la quantité

$$h(\xi_s) = q(\xi_s, \varepsilon_0 + \varepsilon_1) = \xi_s^0 - \xi_s^1.$$

On a, d'après la formule (11),

$$\begin{aligned} h(\xi_s) &= h(\xi) + \int_0^s \dot{\xi}_r^0 - \dot{\xi}_r^1 \, dr \\ &= h(\xi) + \int_0^s \left(\frac{x_r^2 + y_r^2 + 1}{2y_r} - \frac{x_r^2 + y_r^2 - 1}{2y_r} \right) dr \\ &= h(\xi) + \int_0^s \frac{dr}{y_r} \\ &= h(\xi) + \frac{1}{y} \int_0^s e^{-w_r^y - \frac{r}{2}} \, dr. \end{aligned}$$

On retrouve la quantité utilisée dans la démonstration du théorème de Dufresne. Si l'on note $h_\infty = \lim\limits_{s \to +\infty} h(\xi_s)$ et $G(t) = \mathbb{P}\left(\int_0^\infty e^{w_r^y - \frac{r}{2}}\, dr\right)$, on a quel que soit $A \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}_{\left((y,x),\xi\right)}\big(h_\infty \geq A\big) = G\big(y(A - h(\xi))\big).$$

L'équation aux dérivées partielles vérifiée par la fonction $\mathbb{P}_\cdot(h_\infty \geq A)$ permet d'identifier G comme on l'a fait dans la preuve du théorème **1.1**, dont l'idée provient de ce fait.
L'identification de la tribu invariante de la diffusion $\big\{\dot{\xi}_s, \xi_s\big\}_{s \geq 0}$ est exposée dans l'article [Bai07], qui paraîtra ailleurs.

3. Revenons à l'équation (1) et posons

$$G(s, A) \equiv \mathbb{P}\left(\int_0^s e^{w_u - cu}\, du \geq A \right).$$

On montre, à l'aide d'une formule d'intégration par parties analogue à celle que l'on a établi pour $G(A)$, que $G(s,A)$ est une fonction de A de classe $\mathcal{C}^2$ et une fonction de s de classe $\mathcal{C}^1$ ([2]). Notons

$$F_{\geq A}^s\big((y,x),\xi\big) \equiv \mathbb{P}_{(y,x),\xi}(\xi_s \geq A).$$

On écrira $u = \big((y,x),\xi\big)$ et $u_s = \big((y_s,x_s),\xi_s\big)$ afin d'alléger l'écriture.

$$F_{\geq A}^s(u) = G\big(s, y(A - \xi)\big).$$

D'un côté, on a

[2] On étudie pour cela la loi du couple $\left(w_s, \int_0^s e^{w_u - cu}\, du\right)$ grâce à une formule d'intégration par parties.

$$\frac{\mathbb{E}_u\left[\mathbb{P}_{u_\varepsilon}(\xi_s \geq A)\right] - \mathbb{P}_u(\xi_s \geq A)}{\varepsilon} \underset{\varepsilon \searrow 0}{\longrightarrow} \left(\frac{y^2}{2}\partial_y^2 + \left(c + \frac{2}{3}\right) y\,\partial_y + \frac{\partial_\xi}{y}\right) F^s_{\geq A}(u_0),$$

et de l'autre

$$\frac{\mathbb{E}_u\left[\mathbb{P}_{u_\varepsilon}(\xi_s \geq A)\right] - \mathbb{P}_{u_0}(\xi_s \geq A)}{\varepsilon} = \frac{\mathbb{P}_{u_0}((\xi_{s+\varepsilon} \geq A)) - \mathbb{P}_{u_0}(\xi_s \geq A)}{\varepsilon} \underset{\varepsilon \searrow 0}{\longrightarrow} \partial_s F^s_{\geq A}(u_0).$$

On a donc

$$\partial_s F^s_{\geq A} = \left(\frac{y^2}{2}\partial_y^2 + \left(c + \frac{2}{3}\right) y\,\partial_y + \frac{\partial_\xi}{y}\right) F^s_{\geq A}.$$

Cette équation devient pour $G(s, A)$

$$\partial_s\, G(s, A) = \frac{A^2}{2} G''(s, A) + \left(\left(c + \frac{1}{2}\right) A - 1\right) G'(s, A),$$

où le $'$ désigne la dérivation par rapport à A.

Références

[Bai07] Ismaël Bailleul. Poisson boundary of a relativistic diffusion. A paraitre dans *P.T.R.F.*, 2007.

[Bas98] Richard F. Bass. *Diffusions and elliptic operators.* Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, 1998.

[Bel87] Denis R. Bell. *The Malliavin calculus*, volume 34 of *Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics.* Longman Scientific & Technical, Harlow, 1987.

[CPY01] Philippe Carmona, Frédérique Petit, and Marc Yor. Exponential functionals of Lévy processes. In *Lévy processes*, pages 41–55. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2001.

[Duf90] Daniel Dufresne. The distribution of a perpetuity, with applications to risk theory and pension funding. *Scand. Actuar. J.*, (1-2) :39–79, 1990.

[Mal97] Paul Malliavin. *Stochastic analysis*, volume 313 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences].* Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[MY05a] Hiroyuki Matsumoto and Marc Yor. Exponential functionals of Brownian motion. I. Probability laws at fixed time. *Probab. Surv.*, 2 :312–347 (electronic), 2005.

[MY05b] Hiroyuki Matsumoto and Marc Yor. Exponential functionals of Brownian motion. II. Some related diffusion processes. *Probab. Surv.*, 2 :348–384 (electronic), 2005.

[Nua06] David Nualart. *The Malliavin calculus and related topics.* Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2006.

[Yor92] Marc Yor. Sur certaines fonctionnelles exponentielles du mouvement brownien réel. *J. Appl. Probab.*, 29(1) :202–208, 1992.