

---

## TD : Compacité

---

**A. Utilisation de la propriété de Borel-Lebesgue.** Pour un espace métrique, la propriété de Borel-Lebesgue : "*De tout recouvrement d'un compact par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini*", est équivalente à la propriété de Bolzano-Weierstrass : "*Toute suite a une sous-suite convergente*".

**1.** [Mneimé-Testard] L'application exponentielle réalise un homéomorphisme de l'ensemble des endomorphismes hermitiens de  $\mathbb{C}^n$  sur l'ensemble des endomorphismes hermitiens définis positifs de  $\mathbb{C}^n$ .

**2. Exercice.** Soit  $V$  un champ de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^1$  dans  $\mathbb{R}^n$  admettant une trajectoire compacte. Montrez que la solution associée est périodique.

**3. Exercice.** [Gourdon, Ex. 1, p.31] Soient  $E$  et  $F$  deux espaces métriques et  $f : E \rightarrow F$  une application continue telle que  $f^{-1}(K)$  est compact, pour tout compact  $K$  de  $F$ .

**a.** Montrez que  $f$  envoie tout fermé de  $E$  sur un fermé de  $F$ . (On dit  $f$  fermée.) Existe-t-il des applications qui ne sont pas fermées ?

**b.** Notons  $\mathbb{R}_n[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$ . Montrez que l'ensemble des polynômes unitaires de  $\mathbb{R}_n[X]$  dont toutes les racines sont réelles est un fermé de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**B. Fonctions continues définies sur un compact** "*L'image d'un compact par une application continue  $f$ , à valeurs dans un espace métrique, est compacte. En particulier, si  $f$  est à valeurs réelles, elle est bornée et atteint ses bornes.*"

**4. Exercice** [Berger] **a.** Pourquoi la sphère unité  $S_q$  d'une forme quadratique  $q$  sur  $\mathbb{R}^n$ , définie positive, est-elle compacte ?

**b.** Soit  $q'$  une autre forme quadratique sur  $\mathbb{R}^n$ , quelconque, d'endomorphisme symétrique associé  $M$ . Utilisez le théorème des extremas liés pour montrer l'existence d'un point  $a \in S_q$ , vecteur propre de  $M$ , et dont l'espace  $q$ -orthogonal est stable par  $M$ . En déduire le théorème de diagonalisation simultanée suivant. *Etant donné une forme quadratique  $q$  sur  $\mathbb{R}^n$  définie positive, et une forme quadratique quelconque  $q'$  sur  $\mathbb{R}^n$ , il existe une base  $q$ -orthonormée dans laquelle la matrice de  $q'$  (ou  $M$ ) est diagonale.*

**5. Exercice. Sous-groupes compacts de  $GL(\mathbb{R}^d)$ .** Soit  $\mathbf{G}$  un sous-groupe compact de  $GL(\mathbb{R}^d)$ . On souhaite montrer l'existence d'un endomorphisme  $g$  inversible de  $\mathbb{R}^d$ , tel que  $g^{-1}\mathbf{G}g$  est un sous-groupe des isométries (euclidiennes) de  $\mathbb{R}^d$ . On le démontre ici en établissant le lemme suivant.

**Lemme.** *Soit  $n \geq 1$  un entier,  $\mathcal{G}$  un sous-groupe compact de  $GL(\mathbb{R}^n)$ , et  $C$  un convexe d'intérieur non vide, stable par  $\mathcal{G}$ . Il existe alors un point de  $C$  laissé stable par tous les éléments de  $\mathcal{G}$ .*

**a.** Supposons un instant le lemme démontré, et notons  $\mathcal{S}_d$  l'ensemble des endomorphismes symétriques de  $\mathbb{R}^d$ , et  $\mathcal{S}_d^{>0}$  l'ensemble de ceux qui sont définis positifs. Montrez que l'image de  $\mathbf{G}$  par l'application qui à  $g$  associe l'endomorphisme de  $\mathcal{S}_n : S \mapsto g^t S g$ , est un sous-groupe compact  $\mathcal{G}$  de  $GL(\mathcal{S}_n)$ . Dédurre du lemme le résultat attendu.

**b. i)** Il nous reste à démontrer le lemme. L'intérieur de  $C$  étant non vide, on peut trouver  $n + 1$  points  $a_0, \dots, a_n$  formant un repère affine de  $\mathbb{R}^n$ . Montrez que l'enveloppe convexe de  $\bigcup_{i=0}^n \mathbf{G}(a_i)$  est un convexe compact d'intérieur non vide, stable par  $\mathbf{G}$ . On la note  $\tilde{C}$ .

**ii)** Notons  $\lambda$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$ . Montrez que tous les éléments de  $\mathbf{G}$  laissent stable le centre de gravité

$$y = \frac{1}{\lambda(\tilde{C})} \int_{\tilde{C}} x \lambda(dx)$$

de  $\tilde{C}$ . La conclusion provient de ce que  $y$  appartient à  $\tilde{C} \subset C$ . Voyez-vous pourquoi ?

**6.** [Queffelec, p. 188] Tout polynôme à coefficients complexes admet au moins une racine dans  $\mathbb{C}$ .

**7. Exercice. A propos du groupe des isométries d'un compact de  $\mathbb{R}^d$ .** Etant donné un compact  $K$  de  $\mathbb{R}^d$ , on note  $\text{Isom}_K$  l'ensemble des isométries de  $\mathbb{R}^d$  envoyant  $K$  dans  $K$ .

**a.** Montrez qu'une telle isométrie doit vérifier  $f(K) = K$  ; il s'ensuit que  $\text{Isom}_K$  est un groupe.

**b.** On souhaite montrer qu'il existe un point  $p$  de  $\mathbb{R}^d$  tel que  $\text{Isom}_K \subset \text{Isom}_{\{p\}}$ , ce qu'on résume par la formule : "*Les compacts de  $\mathbb{R}^d$  dont le groupe d'isométrie est le plus grand sont les réunions de sphères*".

**i)** L'argument repose sur le lemme suivant, à démontrer par contradiction.

**Lemme.** On définit une application continue en posant  $g(m) = \max_{k \in K} \|k - m\|$ , pour tout  $m \in \mathbb{R}^d$ .

**ii)** Montrez que  $g$  réalise son minimum  $r$  en un unique point  $p$ , et que la boule fermée de centre  $p$  et de rayon  $r$  est la plus petite boule fermée contenant  $K$ . En déduire que toutes les éléments  $f \in \text{Isom}_K$  laissent  $p$  stable.

**C. Espace métriques compacts** Rappelons la caractérisation fondamentale. "*Un espace métrique  $K$  est compact si et seulement si il est précompact et complet*", et le théorème d'Ascoli-Arzelà : "*Les compacts de  $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$  sont les familles équicontinues  $\mathcal{F}$  telles que l'ensemble  $\{f(m); f \in \mathcal{F}\}$  est borné, pour un point  $m \in K$  (donc pour tous!)*".

**8. Exercice** On munit  $E := \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  de la norme infinie. Soit  $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue, et  $T : E \rightarrow E$  définie par la formule

$$T(f)(x) = \int_0^1 k(x, y) f(y) dy.$$

Montrez que l'application  $T$  est compacte (c'est-à-dire, que l'image par  $T$  de la boule unité est pré-compacte).

**9. Alternative de Fredholm.** [Brezis, théorème VI.6.c, p. 91-93] Etant donné un nombre complexe  $\lambda$  non nul et  $g \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ , on a l'alternative suivante à propos de l'équation

$$Tf - \lambda f = g.$$

*i) Si  $\lambda$  n'est pas dans le spectre de  $T$  alors l'équation a une unique solution.*

*ii) si  $\lambda$  est dans le spectre, il existe un sous-espace fermé  $F$  de  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  de co-dimension finie, non trivial, tel que si  $g \notin F$  alors l'équation n'a pas de solution, et si  $g \in F$  alors l'ensemble des solutions forme un sous-espace vectoriel non trivial de dimension finie.*

**9. Exercice** [Queffelec, Ex. 2, p. 81] Soit  $1 \leq p < \infty$ . Montrez que les compacts de  $\ell^p(\mathbb{N})$  sont exactement les parties  $K$  de  $\ell^p(\mathbb{N})$  qui sont équi-intégrables, fermées et bornées. (Rappelons que  $K$  est dite équi-intégrable s'il existe pour tout  $\epsilon > 0$  un entier  $N_\epsilon$  tel que  $\sum_{n \geq N_\epsilon} |a_n|^p \leq \epsilon$ , quel que soit  $a \in K$ .)

**10.** [Brezis] Soit  $U$  un ouvert relativement compact de  $\mathbb{R}^d$ . Les compacts de  $\mathbb{L}^p(U)$ , pour  $1 \leq p < \infty$ , sont donnés par un théorème de Kolmogorov.

**11. Théorème de Schauder.** [Gonnord-Tosel] On pourra aussi aller voir la démonstration de ce théorème de point fixe faite à partir du théorème du point fixe de Brouwer.