Feuille 6

I 1. f dérivable en $x_0 \Rightarrow f$ continue en x_0 OUI

En effet $f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + r(x_0,h)$

où $r(x_0,h)/h \to 0$ lorsque $h \to 0$, donc $f(x_0+h) \to f(x_0)$ lorsque $h \to 0$. Autrement dit $f(x) \to f(x_0)$ lorsque $x \to x_0$

2. Faux, par exemple $f(x) = |x|$ est continue en 0, mais pas dérivable en 0.

3. Faux, voir Exercice V : $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$

4. Faux. (négation de 2.)

II 1. $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$

f est bien dérivable en tout $x \in]0,\infty[$ (à noter, on ne considère pas le pour $x=0$)

$$f'(x) = \frac{-\left(\frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}\right)}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})^2} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}}{2\left(2x+1+2\sqrt{x}\sqrt{x+1}\right)}$$

$$= \frac{-\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}\left(2x+1+2\sqrt{x}\sqrt{x+1}\right)}$$

f' ne prolonge pas continument en $x=0$

2. $f : [-1,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x+1}\sin x$

f est dérivable en tout $x \in]-1,\infty[$, étant le produit de fonctions dérivables : $f'(x) = \sqrt{x+1}\sin x + \dfrac{x}{2\sqrt{x+1}}\sin x + x\sqrt{x+1}\cos x$

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$

$$f'(x) = \frac{1+|x| - x\frac{d}{dx}|x|}{(1+|x|)^2}$$

Alors, pour $x \neq 0$, $\dfrac{d}{dx}|x| = \dfrac{x}{|x|}$, donc pour $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{1+|x| - x\frac{x}{|x|}}{(1+|x|)^2} = \frac{1+|x| - \frac{|x|^2}{|x|}}{(1+|x|)^2} = \frac{1+|x|-|x|}{(1+|x|)^2} = \frac{1}{(1+|x|)^2}$$

f est bien dérivable en $x=0$ aussi avec dérivée $f'(0) = 1$

preuve $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{1+|h|}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{1+|h|} = 1.$

~~4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x|x|$~~

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x|x|$

f est bien dérivable pour $x \neq 0$ avec dérivée

$$f'(x) = |x| + x\frac{x}{|x|} = 2|x| \quad \left(\frac{d}{dx}|x| = \frac{x}{|x|},\ x \neq 0\right)$$

En $x = 0$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h|h|}{h} = \lim_{h\to 0}|h| = 0$$

Donc f est dérivable pour tout x avec dérivée $2|x|$.

5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}$

$$f'(x) = 2x\cos\frac{1}{x} + x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(-\sin\frac{1}{x}\right)$$
$$= 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$$

Alors $\sin\frac{1}{x}$ n'a pas de limite lorsque $x \to 0$, d'où f n'est pas dérivable en $x = 0$; elle est dérivable en tout autre point.

III 1. $f(x)$ est continue en tout point sauf éventuellement $x = 0$ et $x = 1$

En $x = 0$: $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{e^x+e^{-x}}{2} = 1 = f(0)$

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+x} = 1$ Continue en $x=0$.

En $x = 1$: $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{1}{2}$, $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} = \frac{1}{2}$ Continue en $x = 1$

f est continue en tout point

2. f est dérivable en tout point sauf éventuellement $x=0$ et $x=1$.

$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ pour $x < 0$

$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$ pour $x \in]0, 1[$

$f'(x) = -\frac{1}{4x}$ pour $x > 1$

En $x=0$: $\displaystyle\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \cancel{\lim_{h\to 0^-} \frac{e^h+e^{-h}}{2}-1}$

$$= \lim_{h\to 0^-}\frac{\frac{e^h+e^{-h}}{2}-1}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{\frac{1}{2}\left(1+h+\frac{h^2}{2!}+\dots+1-h+\frac{h^2}{2!}-\dots\right)-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}\left(h^2+\dots\right)}{h} = 0$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{1+h}-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1-1-h}{h(1+h)} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{1+h} = -1$$

Donc en $x=0$, $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} \neq \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h}$

et $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ n'existe pas ; f n'est pas dérivable en $x=0$

En $x=1$ $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{1}{1+1+h} - \frac{1}{2}}{h}$

$= \lim_{h\to 0^-} \frac{2-2-h}{2h(2+h)} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{2h(2+h)} = -\frac{1}{4}$

$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{2-\ln(1+h)}{4} - \frac{1}{2}}{h}$

$= \lim_{h\to 0^+} \frac{-\ln(1+h)}{4h}$ $\qquad \ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3}$

$= \lim_{h\to 0^+} \frac{-(1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{3})\dots}{4} = -\frac{1}{4}$.

f est bien dérivable en $x=1$ avec dérivée $-\frac{1}{4}$.

IV f est dérivable en tout point sauf éventuellement $x=1$.

En $x=1$: $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$

Mais $\sqrt{1+h} = 1 + h\, f'(1) + o(h)$ $\qquad \left(\frac{d}{dx}\sqrt{1+x} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)$

$= 1 + h \times \frac{1}{2} + o(h)$

donc $\lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ (On peut aussi voir ça du fait que $\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \to \frac{1}{2}$ lorsque $x \to 1$)

$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{d}{dx}(ax^2+bx+1)\Big|_{x=1}$

$= 2a+b$

Il nous faut alors que $2a+b = \frac{1}{2}$

Mais aussi que f est continue en $x=1$:

$1 = a+b+1$, donc $a+b = 0 \Rightarrow b = -a$

$2a+b = 1/2$

$\Rightarrow 2a - a = \frac{1}{2}$: $a = \frac{1}{2}$ et $b = -1/2$

V $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$

f est prolongeable par continuité en $x=0$ en posant $f(0)=0$.

En effet $|f(x)| = |x^2 \sin \frac{1}{x}| = x^2 |\sin \frac{1}{x}|$

$\leq x^2 \to 0$ lorsque $x \to 0$

f est dérivable en tout $x \neq 0$.

avec dérivée $f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - x^2 \left(\frac{1}{x^2}\right) \cos\frac{1}{x}$

$= 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$

Est-ce que f est dérivable en $x=0$?

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin\frac{1}{h} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} h \sin\frac{1}{h} = 0.$$

Donc f est bien dérivable en $x=0$

Pourtant, la fonction $\begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

n'est pas continue en $x=0$