Université de Bretagne Occidentale
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

L1-Maths/PMRC
Analyse
Année 2017-2018

Feuille 1 - Nombres réels

Rappel : L'ensemble des <u>nombres naturels</u> $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots\}$. Cet ensemble est muni des opérations d'addition, de multiplication et de récurrence ($x \in \mathbb{N} \Rightarrow x+1 \in \mathbb{N}$).

Les <u>entiers</u> $\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ - on ajoute l'opération de subtraction.

Les <u>rationnels</u> $\mathbb{Q} := \{a/b : a, b \in \mathbb{Z} \text{ avec } b \neq 0\}$ - on ajoute l'opération de division.

Les <u>réels</u> $\mathbb{R} := \{\pm c_m c_{m-1} \cdots c_1 c_0, d_1 d_2 d_3 \cdots d_n \cdots : c_k, d_\ell \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}\}$ - on ajoute aux rationnels les limites des suites convergentes.

• Un nombre réel est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.

Exercice I : Simplifier

$$|6-9|, \quad (2^2)^3, \quad 2^{2^3}, \quad \frac{16}{4^3}2^5, \quad \sqrt[3]{-27}, \qquad (-27)^{1/3}, \quad \frac{1}{1/2^3}, \quad 2^{-3}.$$

Exercice II : Montrer que le nombre d'Euler $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$ n'est pas rationnel.

<u>Indication</u> : Supposons au contraire que $e = a/b$ pour $a, b \in \mathbb{N}^*$; puis étudier $b!\left(\frac{a}{b} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{b!}\right)$.

Exercice III : (a) Exprîmer le nombre rationnel $3/7$ en forme décimal.

(b) Exprîmer le decimal $0,956956956\cdots$ comme nombre rationnel a/b $(a, b \in \mathbb{N}^*)$.

Exercice IV : Considérons la partie $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$. Montrer que A n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ (On appelle borne supérieure de A le minimum de l'ensemble des majorants de A).

<u>Indication</u> : Soit M un majorant de A dans $\mathbb{Q}$; posons $M' = (M^2+2)/(2M)$...

Exercice V : Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est dense dans $\mathbb{R}$ si A rencontre chaque intervalle ouvet $]a, b[$ avec $a < b$. Montrer que l'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

<u>Indication</u> : Soit a, b deux réels tels que $a < b$. Observons qu'il existe q tel que $1/(b-a) < q$; soit p le plus petit entier tel que $p > qa$...

SUITE...

Exercice VI : Exprîmer comme intervalle $[a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$ ou $]a, b]$ ($a, b \in \overline{\mathbb{R}}$) les ensembles suivants :
(a) $\{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 2\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x < 8\}$;
(b) $\{x \in \mathbb{R} : x > -\frac{1}{3}\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x < \frac{1}{2}\}$;
(c) $\{x \in \mathbb{R} : x > -2\}$;
(d) $\{x \in \mathbb{R} : x \leqslant -2\}$;
(e) $\{x \in \mathbb{R} : x \leqslant 3\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x > -5\}$;
(f) $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$;
(g) $\lim_{n\to\infty}\{x \in \mathbb{R} : x > \frac{1}{n}\}$;
(h) $\lim_{n\to\infty}\{x \in \mathbb{R} : x \geqslant \frac{1}{n}\}$;
(i) $\{x \in \mathbb{R} : \exists\delta > 0 \text{ t.q. } 1 + \delta < x \leqslant 2 - \delta\}$
(j) $\{x \in \mathbb{R} : \exists\delta > 0 \text{ t.q. } 1 - \delta < x \leqslant 2 - \delta\}$.

Exercice VII : Est-ce-que la somme

$$\frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots + \frac{n}{10^n} + \cdots$$

corréspond à un nombre réel fini ? Si oui, est-ce-qu'il est rationnel ou irrationnel ?

Exercice VIII : Une fraction continue finie est une expression du type

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

où a_0 est un entier et a_i est un entier positif pour $i = 1, \ldots, n$. On utilise la notation $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ pour une telle fraction.

Montrer que toute fraction continue finie est un nombre rationnel, et inversement, montrer que tout nombre rationnel s'exprîme comme une fraction continue finie (indication : trouver un algorithme pour calculer la fraction continue d'un nombre réel).

Montrer que $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, 1] = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1]$.

Trouver une expression en fraction continue du nombre rationnel 415/93.

Montrer que $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ et $[0; a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$ sont réciproques et vérifier cette affirmation pour l'exemple précédant.

Remarque : Tout nombre irrationnel s'exprîme comme une fraction continue infinie, par exemple, le nombre d'Euler a une expression $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots]$.