Université de Bretagne Occidentale
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

L1-Maths/PMRC
Analyse
Année 2017-2018

Feuille 7 - dérivées suite : fonctions convexes, reciproques

Rappels : Une fonction $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est convexe si $\forall x_1, x_2 \in]a, b[$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ on a

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leqslant (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

La fonction est concave si l'inégalité ci-dessus est inversé.

• Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ dérivable. Alors f est convexe (concave) ssi en tout point de $]a, b[$ son graphe est au-dessus (en-dessous) de la droite tangente en ce point. Si f est deux fois dérivable, elle est convexe (concave) ssi $f''(x) \geqslant 0$ ($f''(x) \leqslant 0$) en tout point.

• Soit $f : I \to J$ bijective (injective et surjective) alors sa reciproque $f^{-1} : J \to I$ est définie par $f(x) = y \ \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$. Le graphe de la fonction reciproque se déduit du graphe de f par une réflexion dans la droite $x = y$.

• Si $f : I \to J$ ($I, J \subset \mathbb{R}$ des intervalles ouverts) est dérivable, alors f^{-1} est dérivable avec dérivée

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Exercice I : Trouver les intervalles dans lesquelles les fonctions suivantes sont convexes et concaves :

(a) $2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$, (b) $\cos x$, (c) e^{x^2-x}, (d) $x \ln x$.

Exercice II : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = x^4 - 1$. Soit $I \subset \mathbb{R}$ le plus grand intervalle contenant le point $x = 1$ sur lequel f est injective. Calculer I puis expliciter le fonction reciproque définie sur $f(I)$. Calculer $(f^{-1})'(y)$ pour tout $y \in f(I)$.

Exercice III : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$. Soit $I \subset \mathbb{R}$ le plus grand intervalle contenant le point $x = 2$ sur lequel f est injective. Trouver I et calculer $f(2)$. Calculer $(f^{-1})'(6)$.

Exercice IV : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement décroissante convexe. Etudier la convexité de la fonction $f^{-1} : f(I) \to I$ (appliquer la 1ère définition de convexité).

Exercice V : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.
(a) On suppose que f est majorée, montrer que f est constante.
(b) Le résultat est-il encore vrai pour $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$?

Exercice VI : Trouver des intervalles de bijection pour les fonctions $\cos x$ et $\tan x$, puis calculer les dérivées des fonctions reciproques $\arccos y$ et $\arctan y$.