Université de Bretagne Occidentale
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

L1-Maths/PMRC
Analyse
Année 2017-2018

Feuille 9 - développements limités

Rappels : Notations de Landau : "Grand $\mathcal{O}$" : On suppose que $g(x)$ est non-nulle dans un intervalle autour d'un point c sauf eventuellement en c. Si $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = K$ existe pour $K \neq 0$ on écrit $f = \mathcal{O}(g)$.

"petit o" : Si $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ on écrit $f = o(g)$.

Développement limité d'une fonction : Le développpement limité d'ordre n d'une fonction f en c est une expression

$$f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + o((x-c)^n)$$

C'est à dire c'est une approximation polynomiale dont le reste tend vers zéro plus rapidement que le dernier terme de la somme.

Exercice I. Comparer les fonctions suivantes lorsque $x \to 0$ du point de vu des notations de Landau.

1. $f(x) = \sin x$ et $g(x) = x$.
2. $f(x) = 1 - \cos x$ et $g(x) = x^2$.
3. $f(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$ et $g(x) \equiv 1$.
4. $f(x) = x^{7/3}$ et $g(x) = x^2$.
5. $f(x) = x^{7/3} + x^{5/3}$ et $g(x) = x^2$, $g(x) = x$.

Exercice II. Donner le développement limité en 0 des fonctions suivantes.

1. $\cos x \times \exp x$ à l'ordre 3.
2. $(\ln(1+x))^2$ à l'ordre 4.
3. $\exp(\sin(x))$ à l'ordre 4.
4. $\sin^6(x)$ à l'ordre 9.
5. $\ln(\cos(x))$ à l'ordre 6.
6. $\frac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4.
7. $\arcsin(\ln(1+x^2))$ à l'ordre 6.

Exercice III. Calculer :

1. le développement limité en 1 à l'ordre 3 de $f(x) = \sqrt{x}$.
2. le développement limité en 1 à l'ordre 3 de $g(x) = e^{\sqrt{x}}$.

Exercice IV. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$$

Exercice V. Donner un développement limité à l'ordre 2 de $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$ en 0. En déduire un développement à l'ordre 2 en $+\infty$. Calculer un développement à l'ordre 1 en $-\infty$.

Exercice VI. Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$$

soit un $o(x^n)$ en 0 avec n maximal.

Exercice VII. (a) Montrer que la fonction $f(x) = \ln(1+x^4)$ présente un point critique en $x = 0$; puis étudier sa nature en calculant le développpment limité de f autour de ce point.

(b) Montrer que la fonction $f(x) = \ln(\cos x)$ présente un point critique en $x = 0$; puis étudier sa nature en calculant le développpment limité de f autour de ce point.

(c) Montrer que la fonction $f(x) = \sqrt{1-x+x^2}$ présente un point critique unique et étudier sa nature en calculant le développpment limité de f autour de ce point.