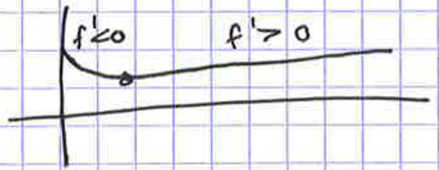
Feuille 6 suite.

VI $\quad f : [0,\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{1+x^n}{(1+x)^n}$

1. f est du type $\dfrac{r(x)}{s(x)}$ avec r, s dérivables et $s(x) \neq$ $\forall x \in [0,\infty[$,
d'où f est dérivable

$$f'(x) = \frac{nx^{n-1}(1+x)^n - n(1+x)^{n-1}(1+x^n)}{(1+x)^{2n}}$$
$$= \frac{n(1+x)^{n-1}\left((1+x)x^{n-1} - 1 - x^n\right)}{(1+x)^{2n}} = \frac{n\left[x^{n-1}-1\right]}{(1+x)^{n+1}}$$

2. Par le tableau de variations on voit que $x=1$ est un minimum de f



3. Il s'ensuit que $f(x) \geq f(1)$ $\forall x \geq 0$

c'est à dire $\dfrac{1+x^n}{(1+x)^n} \geq \dfrac{2}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$

$$\Rightarrow \quad (1+x)^n \leq 2^{n-1}(1+x^n)$$

4. On remplace x par $\dfrac{x}{y}$ dans l'inégalité ci-dessus $(x,y>0)$

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)^n \leq 2^{n-1}\left(1+\frac{x^n}{y^n}\right)$$

On multiplie par y^n : $\quad (y+x)^n \leq 2^{n-1}(y^n+x^n)$.

Cette inégalité est aussi valable pour $x=0$ et $y=0$ d'où
$$(x+y)^n \leq 2^{n-1}(x^n+y^n) \quad \forall x,y \geq 0.$$

VII $\quad$ On suppose qu'il y a quatre racines réelles x_1, x_2, x_3, x_4

Rolle : il existe y_1, y_2, y_3 avec $x_1<y_1<x_2$, $x_2<y_2<x_3$, $x_3<y_3<x_4$
telle que $f'(y_1) = f'(y_2) = f'(y_3) = 0$ où $f(x) = x^n+ax+b$

Mais $f'(x) = nx^{n-1}+a$

Ensuite, il existe z_1, z_2, $y_1<z_1<y_2$, $y_2<z_2<y_3$
tels que $f''(z_1) = f''(z_2) = 0$; Mais $f'' = n(n-1)x^{n-2}$
n'a qu'une seule solution $x=0$, ce qui contredit le fait que $z_1<z_2$.

VIII $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

Accroissements finis : $\forall$ intervalle $[a,b]$, $\exists c \in]a,b[$ avec

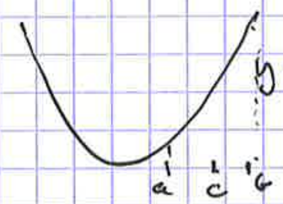
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Alors $f'(x) = 2\alpha x + \beta$.

donc $\exists c$ t.q. $2\alpha c + \beta = \frac{\alpha b^2 + \beta b + \gamma - \alpha a^2 - \beta a - \gamma}{b - a}$

$$= \frac{\alpha(b^2 - a^2) + \beta(b - a)}{b - a} = \alpha(b + a) + \beta$$

$\Rightarrow c = \frac{b+a}{2}$ il s'agit de la moyenne de a et b. ou le mi-point de l'intervalle.



$y = f(x)$ parabole, c'est une propriété de la parabole

IX 1. Soit $g(t) = \ln t$. On applique le thm des accroissements finis sur $[x,y]$: $\exists c \in [x,y]$ t.q.

$$g'(c) = \frac{1}{c} = \frac{\ln y - \ln x}{y - x}$$

Mais $x < c < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{c} > \frac{1}{y}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{\ln y - \ln x}{y - x} > \frac{1}{y} \Rightarrow x < \frac{y - x}{\ln y - \ln x} < y$$

2. Soit $f(\alpha) = \ln(\alpha x + (1-\alpha)y) - \alpha \ln x - (1-\alpha)\ln y$ $\quad 0 \leq \alpha \leq 1$

On veut montrer que $f(\alpha) > 0$ $\forall \alpha \in]0,1[$.

Alors $f'(\alpha) = \frac{x - y}{\alpha x + (1-\alpha)y} - \ln x + \ln y$

$f'(0) = \frac{x-y}{y} - \ln x + \ln y > 0$ par la 1ère partie de la question

$f'(1) = \frac{x-y}{x} - \ln x + \ln y < 0$ par la 1ère partie

~~Par Rolle, $\exists c \in]$~~ Par le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists c \in]x,y[$ avec $f'(c) = 0$

En plus $f'' = -\frac{(x-y)^2}{(\alpha x + (1-\alpha)y)^2} < 0 \Rightarrow f'$ décroissante.

donc f' est positive sur $[0, c]$ et négative sur $]c, 1]$

donc f est croissante sur $[0, c[$ et décroissante sur $]c, 1]$

or $f(0) = 0$ et $f(1) = 0 \Rightarrow \forall x \in [0,1]$, $f(x) \geq 0$

3. On a démontré que $\ln x$ est concave : le segment droit qui va de $(x, \ln x)$ à $(y, \ln y)$ est sous la courbe d'équation $y = \ln x$.