Feuille 8

I

Soit $y = \arctan x$, on veut calculer $y'(x)$

Alors $\tan y = x$, et on dérive :

$$\frac{d}{dx}\tan y = \frac{d}{dx}x$$

$$\Longrightarrow \cancel{\frac{1}{1+y}\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{1}{\cos^2 y}\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos^2 y$$

Mais $\sin^2 y + \cos^2 y = 1 \Rightarrow \tan^2 y + 1 = \frac{1}{\cos^2 y}$

d'où $\frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$

et $\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}.$

II (i)

$\frac{d}{dx}\operatorname{sh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0 \Rightarrow \operatorname{sh} x$ est strictement croissante ~~et~~ partout ~~donc bijective~~ injective sur $\mathbb{R}$.

donc injective sur $\mathbb{R}$, puisque $\lim_{x\to\infty}\operatorname{sh} x = \infty$, $\lim_{x\to-\infty}\operatorname{sh} x = -\infty$

elle est aussi surjective

Soit $\operatorname{argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa réciproque

On pose $y = \operatorname{argsh} x \Rightarrow \operatorname{sh} y = x$

$$\left(\Rightarrow \frac{e^y - e^{-y}}{2} = x \Rightarrow e^y - e^{-y} - 2x = 0 \right.$$

$$\left. \Rightarrow e^{2y} - 2x e^y - 1 = 0 \right)$$

On dérive ~~sha~~ $\operatorname{sh} y = x$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sh} y = \frac{d}{dx}x \Rightarrow \operatorname{ch} y \frac{dy}{dx} = 1$$

Mais $\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1$

$$\Rightarrow \operatorname{ch} y = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 y} = \sqrt{1+x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

et $\frac{d}{dx}\operatorname{argsh} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

III (i) $f(x)=\cos x$: Formule Taylor-Lagrange avec $n=2$ et $a=0$

$f'=-\sin x$, $f''=-\cos x$, $f'''=\sin x$

$$\cos x=\cos 0-x\sin 0+\frac{x^2}{2!}(-\cos 0)+\frac{x^3}{3!}\sin(\xi)$$

avec ξ entre 0 et x

$$=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}\sin\xi.$$

Mais dans l'intervalle $[-\pi/2,\pi/2]$, $\sin\xi$ est une fonction impaire.

et si $x<0$, $\xi\leq 0$, ~~~~ si $x>0$, $\xi>0$

donc $\frac{x^3}{3!}\sin\xi>0$ pour $x\in[-\pi/2,\pi/2]\setminus\{0\}$

et par suite $\cos x<1-\frac{x^2}{2}$.

(ii) $x>0$, soit $f(x)=\ln(1+x)$

On applique Taylor-Lagrange avec $n=2$ et $a=0$

$f'(x)=\frac{1}{1+x}$, $f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}$, $f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$

$$\ln(1+x)=\ln 1+x f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(\xi) \text{ avec } \xi>0$$

$$=0+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}\frac{2}{(1+\xi)^3}>x-\frac{x^2}{2}$$

pourquoi $\frac{x^3}{3!}\frac{2}{(1+x)^3}>0$ pour $x>0$

IV (i) Soit $f(x)=\sqrt{1-x}$, Taylor-Lagrange avec $n=1$:

$f'(x)=-\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}$, $f''(x)=\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(1-x)^{-3/2}=-\frac{1}{4}(1-x)^{-3/2}$

$$\sqrt{1-x}=f(0)+x f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(\xi),\quad 0<\xi<x$$

$$=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2!}\left(-\frac{1}{4}(1-\xi)^{-3/2}\right)$$ Mais $0\leq x\leq 1$

d'où le reste est ≤ 0

et $\sqrt{1-x}\leq 1-\frac{x}{2}$