Université de Bretagne Occidentale – L3 STU Harmonisation Mathématiques Parcours Hydrographie

Paul Baird

Contents

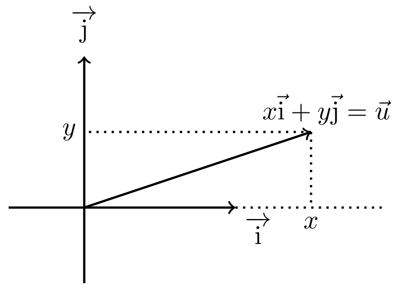
1. Trigonométrie

1.1. Trigonométrie dans le plan

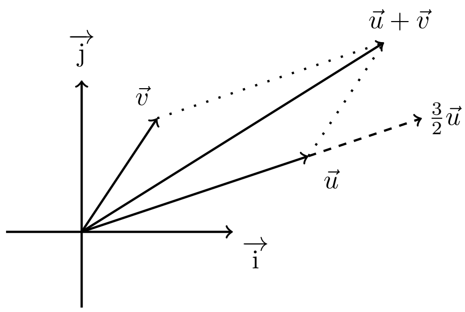
Terminologie

Un *vecteur* est représenté par un segment orienté (une flèche) ayant pour extrémités un point de départ A et un point d'arrivée B. On le note $\overrightarrow{AB}$. Un vecteur possède trois éléments caractéristiques : sa direction ; le sens de parcours ; sa longueur (l'emplacement dans le plan ou l'espace n'a pas d'importance).

Le *plan euclidien* $\mathbb{R}^2$ (ou E^2) détermine un ensemble de vecteurs dont le point de départ est l'origine et le point d'arrivée et un point du plan noté (x, y), $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $x\vec{\mathrm{i}} + y\vec{\mathrm{j}}$. Le couple (x, y) s'appelle les *coordonnées* du vecteur.



L'ensemble des vecteurs dans le plan est muni d'une addition $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x \\ b+y \end{pmatrix}$ et d'une multiplication par des réels (des scalaires) $\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$. L'addition des vecteurs se visualise par la règle du parallèlogramme, et la multiplication par un réel par une dilatation.



Puisque le plan est stable par rapport à l'addition des vecteurs et par rapport à la multiplication par un scalaire, on l'appelle un *espace vectoriel.*

Ce qui est valide en $\mathbb{R}^2$ se généralise dans l'espace $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x \\ b+y \\ c+z \end{pmatrix} \qquad \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$$

La *norme* ou la *longueur* d'un vecteur $\vec{u} = x\vec{\mathrm{i}} + y\vec{\mathrm{j}}$ est la quantité $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$. En partant des points A et B du vecteur, s'ils ont pour coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B), alors

$$||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}\,.$$

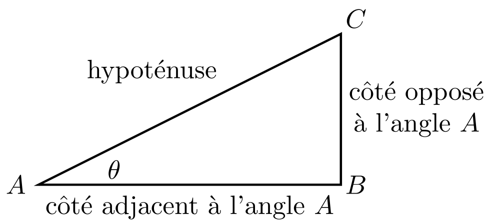
Le *produit scalaire* de deux vecteurs $\vec{u} = a\vec{\mathrm{i}} + b\vec{\mathrm{j}}$ et $\vec{v} = x\vec{\mathrm{i}} + y\vec{\mathrm{j}}$ est la quantité

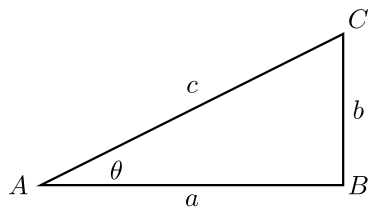
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ax + by\,.$$

On verra dans la suite l'interprétation du produit scalaire.

Fonctions trigonométriques

Soit ABC un triangle rectangle ($\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$) avec $\angle CAB = \theta$:





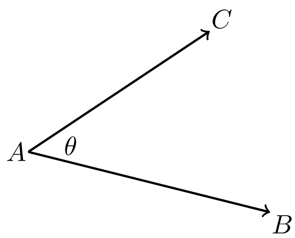
alors $\cos\theta := a/c$, $\sin\theta := b/c$ et $\tan\theta := \sin\theta/\cos\theta = b/a$.

On remarque le théorème de Pythagore : $a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

Il s'ensuit que (exercice) :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = ||\overrightarrow{AB}||\,||\overrightarrow{AC}|| \cos\theta\,.$$

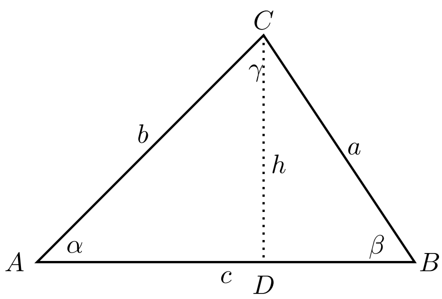
Cette formule reste vraie quelque soit les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ où θ est l'angle entre les vecteurs :



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = ||\overrightarrow{AB}||\,||\overrightarrow{AC}|| \cos\theta$$

Relations métriques dans un triangle

Soit ABC un triangle quelconque :



Théorème d'Al Kashi : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,.$

<u>Preuve</u> : $c = b\cos\alpha + a\cos\beta \Rightarrow c^2 = bc\cos\alpha + ac\cos\beta$.
De même

$$a^2 = ac\cos\beta + ab\cos\gamma$$
$$b^2 = bc\cos\alpha + ab\cos\gamma$$

La formule s'ensuit qed

Aire et la loi des sinus : Par l'image ci-dessus on voit que l'aire du triangle $T = \frac{1}{2}AD \times h + \frac{1}{2}DB \times h = \frac{1}{2}AB \times h$.

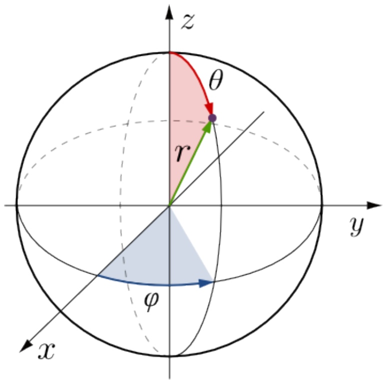
En générale l'aire est $\frac{1}{2}\times$ base $\times$ hauteur $= \frac{1}{2}ca\sin\beta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$.

A partir de ces formules on obtient la loi des sinus:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

1.2. Trigonométrie sphérique

Coordonnées sphériques



Les coordonnées (r, λ, θ) s'appellent le *rayon*, *longitude* et *colatitude*, respectivement.

L'angle λ est compris entre 0 et 2π radians (0^o et 360^o) et l'angle θ est compris entre 0 et π radians. L'angle $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$ désigne la *latitude.* Alors le pôle nord est de latitude $\pi/2$, l'équateur de latitude 0 et le pôle sud de latitude $-\pi/2$. Pour des raisons historiques longitude 0 passe par Greenwich en Angleterre.

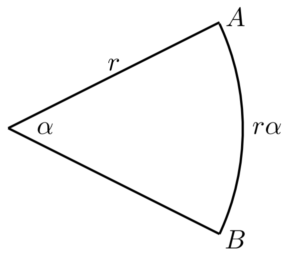
La relation entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées sphériques se fait par les formules:

$$\begin{cases} x &= r\sin\theta\,\cos\lambda \\ y &= r\sin\theta\,\sin\lambda \\ z &= r\cos\theta \end{cases}$$

Grand cercle Trois définitions équivalentes :

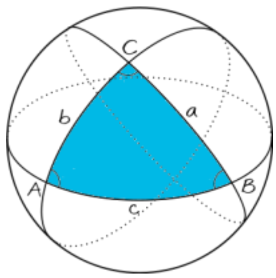
- un cercle tracé à la surface d'une sphère qui a le même diamètre qu'elle ;
- un cercle tracé sur la sphère ayant le même centre que la sphère ;
- l'intersection entre une sphère et un plan passant par le centre de cette sphère.

Deux points distincts d'une sphère determinent un grand cercle unique qui les contient. La distance la plus courte entre ces deux points (la *distance géodésique*) est donnée par la distance de l'arc du grand cercle joignant les points. Par ailleurs, cette distance est égale à $r \times \alpha$ où r est le rayon de la sphère et α est l'angle sous-tendu au centre de la sphère par les deux points (mesuré en radians).



Les points polaires d'un grand cercle sont les deux pôles pour lesquels ce grand cercle est l'équateur.

Triangle sphérique



Les côtés d'un triangle sphérique sont des arcs des grands cercles. On suppose d'abord que la sphère est de rayon unité. Donc a, b et c sont les angles sous-tendus au centre 0 de la sphère par la partie du grand cercle correspondante.

Un triangle sphérique est déterminé par ses trois angles, ce qui est très différent du cas d'un triangle euclidien.

L'*orthodromie* désigne la *géodésique* (le chemin le plus court) entre deux points d'une sphère, c'est à dire le plus petit des deux arcs de grand cercle qui passe par ces deux points. Pour les navigateurs, une route orthodromique désigne ainsi la route la plus courte à la surface du globe terrestre entre deux points.

Loi des cosinus : $\cos a = \cos b\, \cos c + \sin b\, \sin c\, \cos\alpha$ (ainsi que les deux autres relations obtenues en permutant a, b, c).

<u>Preuve</u> : On peut effectuer des rotations du sphère afin que les trois sommets A, B et C ont coordonnées $(0, 0, 1)$, $(\sin c, 0, \cos c)$ et $(\sin b\, \cos\alpha, \sin b \sin\alpha, \cos b)$ respectivement. D'un part $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \cos a$ et d'autre part

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \sin c\, \sin b\, \cos\alpha + \cos c\, \cos b\,.$$

L'expression s'ensuit. qed

On peut réarranger cette formule afin d'exprîmer l'angle en termes des longueurs des côtés :

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b\, \cos c}{\sin b\, \sin c}\,.$$

Loi des sinus :

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}\,.$$

<u>Preuve</u> : D'après la loi des cosinus

$$\sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{\cos a - \cos b\, \cos c}{\sin b\, \sin c}\right)^2 = \frac{(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c) - (\cos a - \cos b\, \cos c)^2}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

d'où

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{(1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a\, \cos b\, \cos c)^{1/2}}{\sin a\, \sin b\, \sin c}$$

Puisque la partie droite est invariante par des permuations de a, b, c, la loi d'ensuit. qed

<u>Remarque</u> : Lorsque l'un des angles est un rectangle ces formules se simplifient ; dans ce cas certaines de ces relations sont connues sous le nom *lois de Napier*.

<u>Exercice</u> : Etudier comment ces lois se modifient lorsque la sphère de de rayon r quelconque.

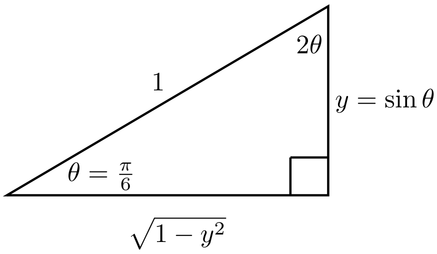
Aire d'un triangle sur une sphère de rayon r : Aire $= r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$.

Par exemple, si $\alpha = \beta = \gamma = \pi/2$, alors l'aire $= \pi r^2/2$ ce qui est égale à $4\pi r^2/8$, c'est à dire un huitième de l'aire de la sphère.

1.3. Exercices

Trigonométrie plane

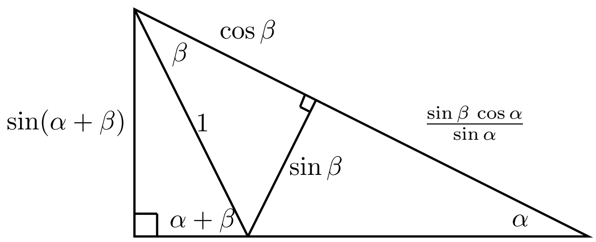
I. A l'aide du triangle suivant et la formule de double angle $\sin 2\theta = 2\sin\theta\,\cos\theta$ (voir question II ci-dessous), en déduire que $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

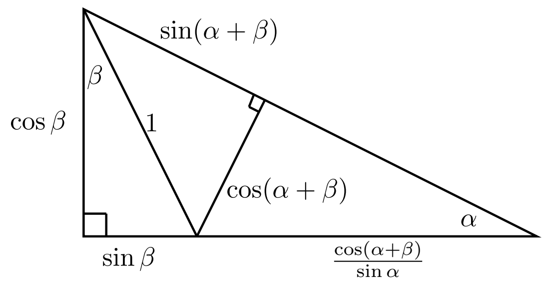


Ensuite calculer $\cos\theta$ lorsque $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi$.

II. D'abord comprendre les triangles suivants, ensuite les appliquer afin de montrer les formules pour le sinus et cosinus de la somme des angles:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta \qquad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta$$





III. En déduire de la question précédante que $\cos(\theta+2k\pi) = \cos\theta$ et $\sin(\theta+2k\pi) = \sin\theta$ où k est un entier quelconque. Résoudre $2\cos^2 x - 5\cos x = -2$.

IV. On considère un triangle ABC du plan.

a) Montrer l'existence d'un unique point G, appelé centre de gravité du triangle ABC, tel que l'on ait $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

b) Soit I le milieu de BC. Montrer que G appartient au segment AI et que l'on a $AG = \frac{2}{3}AI$.

c) Déduire de ce qui précède que les trois médianes du triangle ABC sont concourantes (une médiane est une droite qui joint un sommet au milieu du côté opposé).

V. Montrer que pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan on a l'inégalité triangulaire :

$$||\vec{u}+\vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$$

Quelles conditions doivent ils vérifier pour que l'on ait

$$||\vec{u}+\vec{v}|| = ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$$

VI. J'observe un avion passer directement au dessus. Dès que j'entends le son de sa moteur directement au dessus, l'avion est arrivé à 30^o du vertical. Sachant que la vitesse du son est environ 1200km/hr et que la vitesse de l'avion est 500km/hr, quelle est son hauteur ?

Trigonométrie sphérique

VII. Etudier les lois de cosinus et de sinus pour un sphère de rayon quelconque.

VIII. Soit λ_1, φ_1 et λ_1, φ_2 les longitudes et latitudes de deux points A et B d'une sphère. Ecrire $\Delta\lambda = |\lambda_1 - \lambda_2|$ pour la valeur absolue de la différence.

a) Montrer que l'angle sous-tendu au centre de la sphère par A et B est donné par

$$\Delta\sigma = \arccos(\sin\varphi_1\ \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1\ \cos\varphi_2\ \cos(\Delta\lambda))$$

(on forme un triangle en ajoutant le pôle nord puis on applique la loi des cosinus).

b) En déduire que si la sphère est de rayon r alors la distance géodésique entre les deux points est donnée par $d = r\Delta\sigma$.

IX. Soit A et B deux points de la surface terrestre localisés à des longitudes $\lambda_A = 0^o$ et $\lambda_B = 90^o$ et appartenant au même parallèle de latitude $\varphi = 30^o$. Calculer la distance géodésque d_{AB} entre A et B. Quelle distance d'_{AB} parcourt-on pour aller de A à B en restant sur le même parallèle ? Comparer ces deux distances. A quelle latitude φ doivent être A et B pour que l'on ait $d'_{AB} = d_{AB}$? On prendra le rayon de la terre comme 6400km.

X. Le latitudes φ et longitudes λ de Londres (A), New York (B) et Buenos Aires (C) sont

$$\begin{array}{lll} \varphi_A = +51^o30' & \varphi_B = +40^o43' & \varphi_C = -34^o36' \\ \lambda_A = -0^o10' & \lambda_B = -74^o01' & \lambda_C = -58^o27' \end{array}$$

a) Déterminer les distance entre ces trois villes (voir la question VIII).

b) Calculer les angles aux sommets A, B et C (penser à la loi des cosinus).

c) Calculer la surface du triangle Londres - New York - Buenos Aires et son rapport avec la surface terrestre.

2. Géométrie dans l'espace

2.1. Les plans et les droites

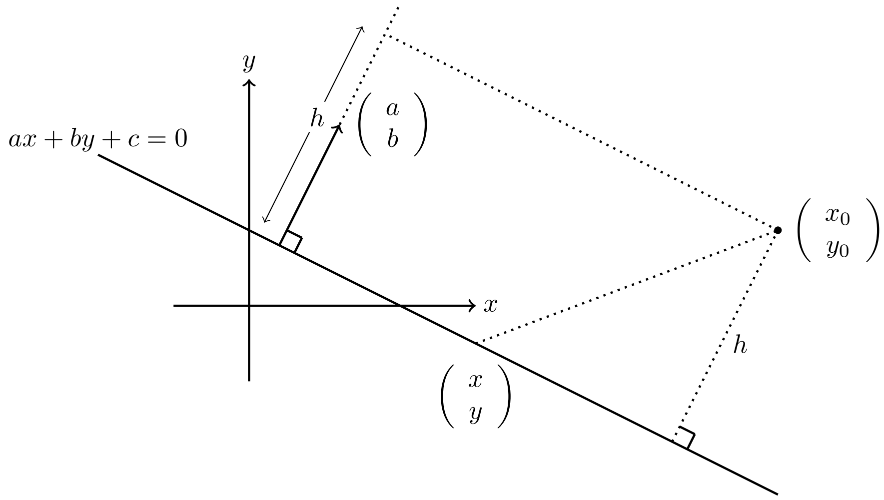
Equation de droite dans le plan

$$ax + by + c = 0$$

où a, b et c sont des constantes définies à un multiple près. Lorsque $b \neq 0$, on peut diviser l'équation par b afin de trouver une forme familière :

$$y = mx + d$$

où $m = -a/b$ est le gradient et $d = -c/b$.



Distance d'un point à une droite

Par définition, la distance entre un point $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et une droite est la longueur du plus petit segment droit joignant $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ à un point de la droite ; il s'agit du segment perpendiculier à la droite passant par le point.

Le vecteur normal unitaire à la droite est donné par $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} / \sqrt{a^2 + b^2}$.

Le vecteur joignant $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ est donné par $\begin{pmatrix} x_0 - x \\ y_0 - x \end{pmatrix}$

La distance h est alors donnée par

$$h = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 - x \\ y_0 - x \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (ax_0 + by_0 + c)$$

En général on prend la valeur absolue de cette valeur.

Equation de plan dans l'espace

De la même façon on définit un plan dans l'espace comme l'ensembles des points vérifiant une équation du type

$$ax + by + cz + d = 0$$

où a, b, c, d sont des constantes définies à un multiple près. Par les mêmes arguments ci-dessus, on voit que la distance d'un point quelconque $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ à ce plan est donnée par

$$h = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} |ax_0 + by_0 + cz_0 + d|$$

Deux vecteur engenrent un plan passant par l'origine - voir *produit vectoriel* ci-dessous pour la méthode de calculer son équation.

Equation de droite dans l'espace

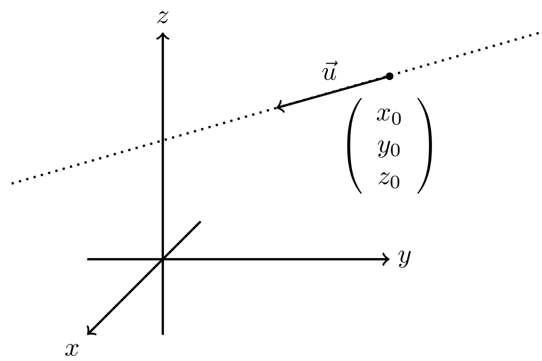
Si $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ est un point d'une droite D et $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D, cette droite peut être décrite à l'aide de la paramétrisation :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & at + x_0 \\ y & = & bt + y_0 \\ z & = & ct + z_0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

On remarque que $(x - x_0)/(y - y_0) = a/b$, $(x - x_0)/(z - z_0) = a/c$ et $(y - y_0)/(z - z_0) = b/c$; ce qu'on peut resumer par la notation :

$$(x - x_0) : (y - y_0) : (z - z_0) = a : b : c$$

Il s'agit d'une autre façon de décrire la droite.

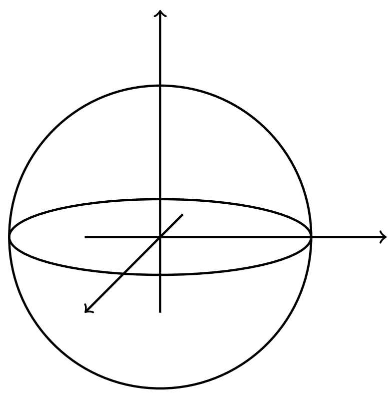


En général deux plans intersectent en une droite.

<u>Exercice</u> : Trouver la droite d'intersection des deux plans

$$\begin{array}{rcl} 2x - y + z & = & 5 \\ x + y - 2z & = & 1 \end{array}$$

Equation de sphère dans l'espace



Pour une sphère de centre $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ et de rayon r, son équation est donnée par

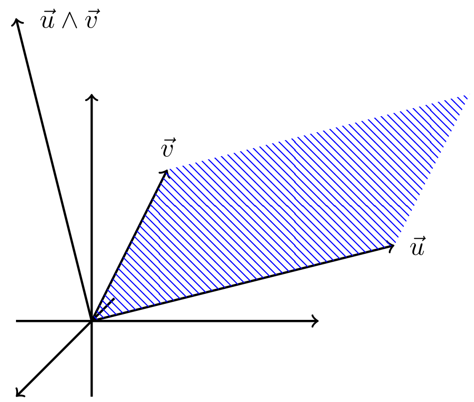
$$\left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \right\| = r \quad \Leftrightarrow \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

Produit vectoriel

Donné deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$, leur *produit vectoriel* est le vecteur

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

il s'agit d'un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dirigé dans le sens direct (règle de la main droite) de norme égale à l'aire du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (exercice).



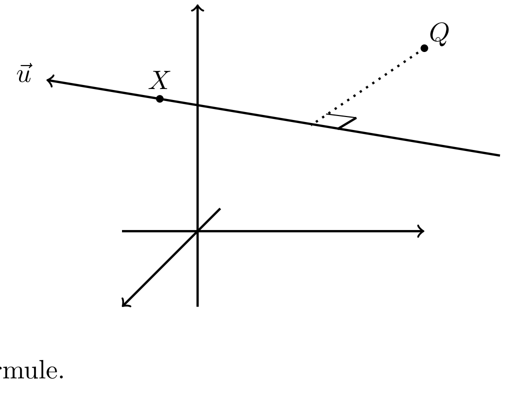
Quelques propriétés :

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$;
- $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$;
- $\vec{u} \wedge (a\vec{v} + b\vec{w}) = a\,\vec{u} \wedge \vec{v} + b\,\vec{u} \wedge \vec{w}$.

Distance d'un point à une droite

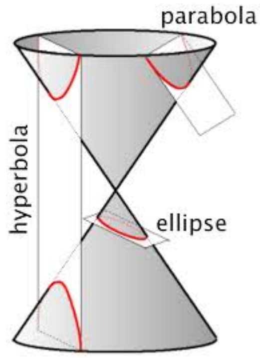
On suppose que la droite D passe par le point $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ avec vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Alors la distance d'un point Q à la droite D est donnée par

$$d(Q, D) = \frac{||\overrightarrow{XQ} \wedge \vec{u}||}{||\vec{u}||}.$$



Exercice : Vérifier cette formule.

2.2. Les coniques

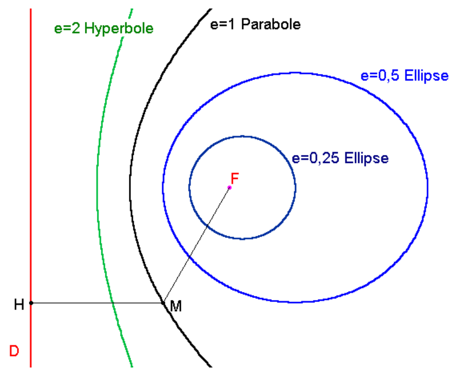


Les coniques constituent une familles de courbes planes algébrique (sont déterminées par des equations polynomiales) définies comme l'intersection d'un cône avec un plan. Parmi les coniques non dégénérées on compte la parabole, l'ellipse et l'hyperbole.

Définition par foyer Dans le plan, on considère une droite D (la directrice) et un point F (le foyer) non situé sur D. Soit e un réel strictement positif. On appelle conique de *droite directrice D, de foyer F et d'excentricité e* l'ensemble des points M du plan vérifiant

$$d(M,F) = e \times d(M,D)$$

où $d(M,F)$ mesure la distance du point M au point F. Si $e < 1$, $e = 1$, $e > 1$ on obtient une ellipse, une parabole ou une hyperbole, respectivement.



Définition algébrique

On appelle conique tout ensemble de points $M(x,y)$ vérifiant une équation de la forme:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

où A, B, C, D, E, F sonte des constantes telles que $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$. Le discriminant $AC - B^2$ détermine la nature de la conique. A noter les solutions particulières : point, deux droites sécantes, deux droite parallèles, une droite.

La parabole

Optique : tous les rayons issus de F sont réfléchis de la parabole dans la même direction perpendiculaire à D. Inversement, une parabole permet de concentrer des ondes ou des rayons en un point, le foyer de la parabole.

Physique : La parabole est la trajectoire décrite par un objet que l'on lance si on peut dégliger la courber de la terre, le frottement de l'air et la variation de la gravité avec la hauteur.

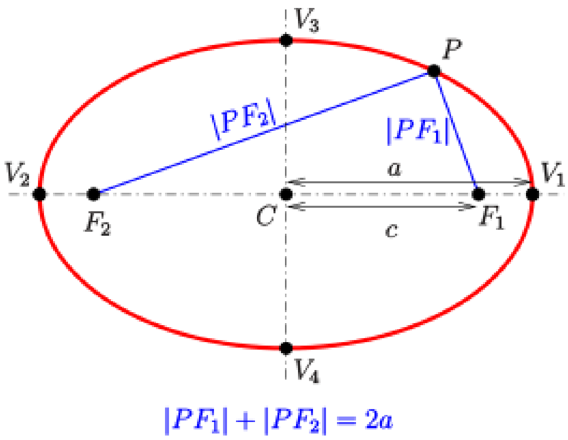
Si on normalise les coordonnées afin que la parabole passe par l'origine et que la directrice soit parallèle à l'axe des y, l'équation de la parabole prend la forme

$$y^2 = 2ax$$

pour une constante a. Dans ce cas le foyer se trouve au point $(a/2, 0)$ et la directrice est la droite $x = -a/2$ (voir solutions aux exercices).

L'ellipse

Une ellipse est la trajectoire approximative d'une planete du système solaire en orbite autur du soleil, avec barycentre (centre de masse) un des foyers. Elle est est aussi l'image en perspective d'un cercle sur un plan



Une ellipse est l'ensemble de points vérifiant $||\overrightarrow{PF_1}|| + ||\overrightarrow{PF_2}|| = 2a$ pour deux points fixes F_1 et F_2 appelés *foyers* et une constante a telle que $2a > ||\overrightarrow{F_1F_2}||$. Le mi-point C du segment droit joignant les deux foyers s'appelle le *centre* de l'ellipse. La droite passant par les deux foyers s'appelle l' *axe focal* ; l'axe orthgonal passant par C s'appelle le *petit axe* et le cercle centré en C de rayon a, le *cercle principal*.

Lorsque l'axe focal est l'axe des x et le centre l'origine, l'équation de l'ellipse se met sous la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

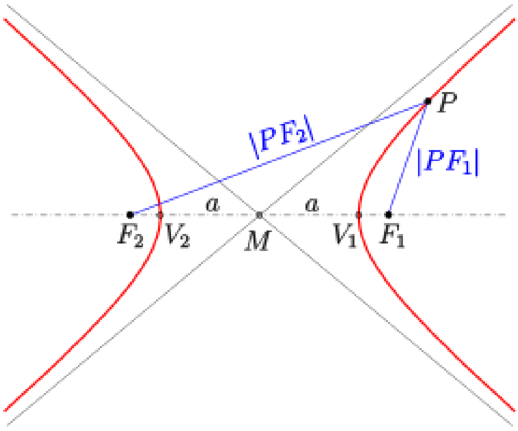
donnant un représentation paramétrique

$$(x, y) = (a \cos t, b \sin t), \qquad 0 \leq t < 2\pi$$

Dans ces coordonnées, l'excentricité est donnée par $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, les foyers se trouvent aux points $(\pm c, 0) = (\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ et les directices sont les axes $x = \pm a^2/c = \pm a^2/\sqrt{a^2 - b^2}$ (voir solutions aux exercices).

L'hyperbole

L'hyperbole est la trajectoire approximative d'un objet celeste dont sa vitesse excède la vitesse de libération du champ gravitationel. Par analogie avec l'ellipse elle est définie comme l'ensemble des points P vérifiant $||\overrightarrow{PF_1}|| - ||\overrightarrow{PF_2}|| = 2a$ pour deux points fixes F_1 et F_2 appelés *foyers* et une constante $a > 0$. L'axe focal, le petit axe et le centre se définissent comme pour l'ellipse.



$||PF_2| - |PF_1|| = 2a$

On remarque que l'hyperbole est constituée de deux composantes disjointes. Lorsque l'axe focal est l'axe des x et le centre l'origine, son équation cartesienne se met sous la forme

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donnant les représentations paramétriques

$$(x, y) = (a \cosh t, b \sinh t) \text{ et } (-a \cosh t, b \sinh t) \qquad -\infty < t < \infty$$

ou

$$(x, y) = \left(\frac{a}{\cos t}, b \tan t\right) \qquad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$$

Si on résout l'équation cartésienne pour y on obtient

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

et lorsque $|x|$ est très grand cette valeur est approximée par

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

Ce sont deux droites passant par le centre C (l'origine) qui s'appellent les *asymptotes* de l'hyperbole.

Dans ces coordonnées, l'excentricité est donnée par $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$, les foyers se trouvent aux points $(\pm c, 0) = (\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ et les directices sont les axes $x = \pm a^2/c = \pm a^2/\sqrt{a^2 + b^2}$ (voir solutions aux exercices).

Exercice : La distance d'un foyer à chaque asymptote est donnée par b ; le produit des distances d'un point sur l'hyperbole aux deux asymptotes est constante donnée par $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

2.3. Exercices

I. (Equation de plan) a) Trouver l'équation du plan avec normal $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ passant par le point $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) Trouver l'équation du plan passant par les trois point $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) Trouver l'équation du plan contenant la droite $x-2 : y : z+1 = 1 : 1 : 2$ et le point $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

II. (Equation de droite) a) Trouver l'équation de la droite passant par le point $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Trouver l'équation de la droite passant par les deux points $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) Trouver l'équation de la droite déterminée par l'intersection des deux plans

$$\begin{cases} x+y-2z & = & 1 \\ 3x-y+z & = & 2 \end{cases}$$

d) Trouver l'équation de la droite déterminée par l'intersection des deux plans

$$\begin{cases} x+2y-z & = & 3 \\ 5x-y+z & = & 0 \end{cases}$$

III. (Distance d'un point à un plan) a) Calculer la distance du point $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ au plan $x-2y-z=2$; au plan $x-2y-z=-2$.

b) Montrer que la droite $x-1 : y : z = 0 : 1 : 1$ est parallèle au plan $2x-y+z=1$ et calculer sa distance au plan.

IV. (Produit vectoriel) a) Calculer $\vec{\mathrm{i}} \wedge \vec{\mathrm{j}}$, $\vec{\mathrm{j}} \wedge \vec{\mathrm{k}}$ et $\vec{\mathrm{k}} \wedge \vec{\mathrm{i}}$.

b) Calculer $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Montrer que pour deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ on a $\vec{v} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{w} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = 0$. Montrer que $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$ corréspond au volume du parallélépipède engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

V. (Distance d'un point à une droite) a) Calculer la distance du point $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ à la droite $x-2 : y+1 : z-3 = 1 : (-2) : 1$.

b) Calculer l'équation dans le plan de la droite passant par les deux points $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; calculer la distance de l'origine à cette droite.

c) (Plus difficile) Soient D_1 et D_2 les deux droites données respéctivement par $x+1 : y : z+1 = 1 : 2 : 2$ et $x : y-1 : z+1 = 2 : (-1) : (-1)$. Calculer la valeur minimale de $||\overrightarrow{PQ}||$ lorsque P appartient à D_1 et Q appartient à D_2 (il s'agit de la distance entre les deux droites).

VI. (Un vrai-faux) Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Toutes les coniques ont un centre.
2. Un cercle est une conique.
3. Les coniques ont deux foyers et deux directrices.
5. Une hyperbole admet deux asymptotes qui se coupent au centre de l'hyperbole.
6. Il suffit de connaître le discriminant de l'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ pour connaître la nature de la courbe qui admet cette équation.

VII. Soient A et B deux points tels que $AB := ||\overrightarrow{AB}|| = 2$.

a) Quelle est la nature de lensemble $\{M | AM + BM = 4\}$?

b) Quelle est la nature de l'ensemble $\{M | AM + BM = 1\}$?

c) Quelle est la nature de lensemble $\{M | AM + BM = 2\}$?

d) Quelle est la nature de lensemble $\{M | AM - BM = 1\}$?

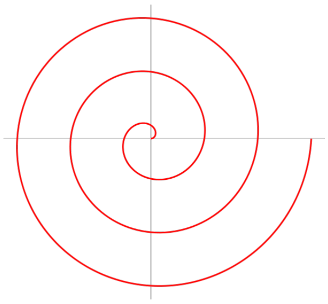
VIII. Calculer les éléments caractéristiques (foyer(s), paramètre p, centre, axe focal) de la conique dont une équation cartésienne est :

1. $y^2 = x$;
2. $y^2 = -x$;
3. $y = x^2$;
4. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$;
5. $x^2 + 2y^2 = 1$;
6. $x^2 - y^2 = 1$;
7. $-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$;
8. $y = x^2 + x + 1$;
9. $y^2 + y - 2x = 0$;
10. $y = \sqrt{2x+3}$;
11. $x^2 + x + 2y^2 + y = 0$;
12. $y = -2\sqrt{-x^2 + x}$;
13. $-x^2 - y^2 + x + y + 1 = 0$;
14. $y = \frac{1}{x}$.

3. Système de coordonnées

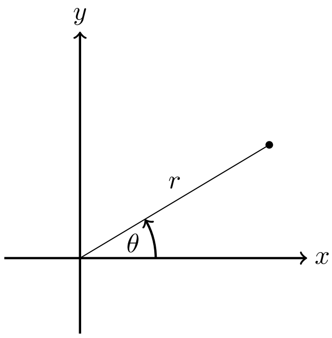
3.1. Système de coordonnées plans et dans l'espace

Parfois is est utile d'utliser un autre système de coordonnées que les coordonnées cartésiennes afin d'étudier un problème. Par exemple, il est difficile d'exprîmer une spirale en coordonnées cartésiennes ; beaucoup plus simple en coordonnées polaires : $r = a \cdot \theta$.



Coordonnées polaires

On représente un point du plan par deux paramètres : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $(0 \leq r < \infty)$ – la distance de l'origine ; et $\theta = \arctan \frac{y}{x}$ – l'angle mesuré dans le sens direct de l'axe des x.



On peut inverser la relation et exprîmer x et y en fonction de r et θ :

$$x = r\,\cos\theta\,, \qquad y = r\,\sin\theta$$

Attention : Sans autre précision, il y a plusieurs choix pour θ car $\cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta$ et $\sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta$ pour tout entier k (voir la spirale où $0 \leq \theta < \infty$).

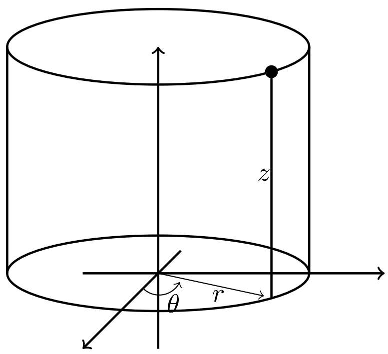
Système général de coordonnées

Un système des coordonnées permet de faire correspondre à chaque point dans un espace un (et un seul) N-tuplet de scalaires (réels), où N est la dimension de l'espace ; dans le plan $N = 2$, dans l'espace de notre expérience $N = 3$. On peut envisager que $N > 3$, par exemple pour décrire les positions d'un bras robotique.

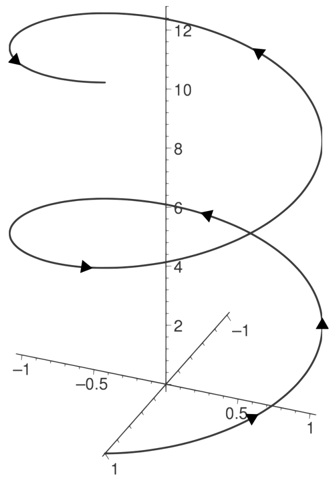
Les coordonnées (x, y) et (x, y, z) dans le plan et dans l'espace s'appellent les *coordonnées cartésiennes*. Un système général des coordonnées est la données des fonctions $(u(x, y), v(x, y))$ en dimension 2, et $(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$ en dimension 3. On exige une condition d'indépendance des fonctions, par exemple $(u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, v(x, y) = x^2 + y^2)$ n'est pas un système de coordonnées en dimension 2 puisque $v = u^2$ et l'une des coordonnées dépend de l'autre.

3.2. **Coordonnées cylindriques**

Les coordonnées cylindriques (r, θ, z) sont définies en termes des coordonnées cartésiennes (x, y, z) par $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan \frac{y}{x}$ et $z = z$.

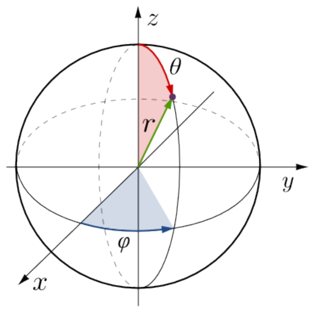


Bien evidemment on peut inverser la transformation des coordonnées pour exprîmer (x, y, z) en fonction de (r, θ, z) : $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$. L'hélice est la courbe : $r = a$, $z = b\theta$ $(-\infty < \theta < \infty)$ pour des constantes a et b.



3.3. **Coordonnées sphériques**

On a rencontré les coordonnées sphériques dans §1.2 :



$$\begin{cases} x &= r\sin\theta\,\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\,\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \varphi &= \arctan\frac{y}{x} \\ \theta &= \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \end{cases}$$

3.4. **Exercices**

I. Soit un point A dont les coordonnées cartésiennes sont $x = -3$ et $y = 4$. Calculer les coordonnées polaires de ce point (l'angle sera donné en degrés) ?

II. A une certaine date les coordonnées cartésiennes géocentriques de la Lune sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -245622\ km \\ y & = & -247804\ km \\ z & = & -122804\ km \end{array} \right.$$

Calculer les coordonnées sphériques (r, φ, θ) correspondantes (on donnera les valeurs des angles en degré, minute et seconde d'angle).

III. Etudier et tracer la courbe d'équation polaire $r(\theta) = 1 + \cos\theta$.

IV. Construire la rosace d'équation polaire $r(\theta) = \sin(4\theta)$. On fera notamment attention à se restreindre à l'intervalle d'étude le plus petit possible.

V. (Lemniscate de Bernoulli) On considère les points du plan $P(1, 0)$ et $Q(-1, 0)$. Déterminer une équation polaire de l'ensemble des points M du plan tels que $MP \times MQ = 1$. Etudier et tracer cette courbe.

VI. a) Soient A et B deux points ayant pour coodonnées cylindriques (r_A, θ_A, z_A) et (r_B, θ_B, z_B). Exprimer la distance d entre ces deux points en fonction des coordonnées cylindriques.

b) Idem pour les coordonnées sphériques.

VII. Calculer les coordonnées cartésiennes des points A et B dont les coordonnées sphériques sont $(r_A, \theta_A, \varphi_A) = (1, \pi/2, \pi)$ et $(r_b, \theta_B, \varphi_B) = (8, \pi/4, 5\pi/4)$.

VIII. Calculer l'angle AOB si les coordonnées sphériques de A et B sont respectivement $(r_A, \theta_A, \varphi_A) = (1, \pi/3, \pi/4)$ et $(r_b, \theta_B, \varphi_B) = (2, \pi/2, 2\pi/3)$

4. **Eléments de calcul matriciel**

Une *matrice* à m lignes et n colonnes est un tableau de mn nombres de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Les nombres a_{ij} s'appellent les *coefficients* de la matrice. Le coefficient a_{ij} se trouve dans la ligne i et dans la colonne j. Dans la suite, nous allons considérer des matrices avec au plus 3 lignes et colonnes. Voici des exemples :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce sont respectivement une 3×2, une 2×3, une 2×2, une 3×1 et une 1×3 matrice. Considérons la première matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$. Les *vecteurs lignes* sont les trois vecteurs $(1,2)$, $(3,4)$ et $(5,6)$. Les *vecteurs colonnes* sont les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

4.1. **Opérations élémentaires sur le matrices**

Additions des matrices : On ne peut qu'additionner deux matrices du même type. Par exemple, on peut prendre la somme d'une 3×2 et une 3×2 matrice, mais on ne peut pas prendre la somme d'une 3×2 et une 2×3 matrice. Pour additionner deux matrices on prend la somme des coefficients correspondants :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 1 & 2 \\ -2 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplication d'une matrice par un nombre réel (un scalaire) : On multiplie une matrice par un nombre réel en multipliant chaque coefficient par le nombre :

$$3 \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Multiplication des matrices : Il n'est que possible de multiplier une $m \times n$-matrice et une $n \times p$ matrice. C'est à dire le nombre de colonnes de la première matrice doit être égale au nombre de lignes de la deuxième matrice. Le résultat est une $m \times p$ matrice. Le coefficient dans la place ij (ligne i, colonne j) est donné par le produit scalaire de la ligne i de la première matrice avec la colonne j de la deuxième matrice :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \times -2 + 2 \times 1 + 0 \times -1 & 1 \times 0 + 2 \times 3 + 0 \times 2 \\ 3 \times -2 + 1 \times 1 + -1 \times -1 & 3 \times 0 + 1 \times 3 + -1 \times 2 \\ 0 \times -2 + 6 \times 1 + -2 \times -1 & 0 \times 0 + 6 \times 3 + -2 \times 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -4 & 1 \\ 8 & 14 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La multiplication ne commute pas en général, c'est à dire si A et B sont deux matrices, en général $AB \neq BA$ - *l'ordre de multiplication est important.* Par exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B =$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Matrice identité : La $n \times n$–matrice identit est la matrice I_n ayant 1 le long de sa diagonale (partant l'en haut à gauche vers le bas à droite) et des 0 ailleur :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Elle a la propriété que $I_nA = A$ et $BI_n = B$ pour toute $n \times p$–matrice A et toute $m \times n$–matrice B.

Transposée d'une matrice : Il s'agit de la matrice obtenue en intechangeant les ligne et les colonnes. La transposée d'une $m \times n$–matrice A est une $n \times m$–matrice notée A^t. Il s'ensuit que $(AB)^t = B^tA^t$.

4.2. Interprétation géométrique d'une matrice

Une $m \times n$ matrice représente une application linéaire d'un espace à n dimensions dans un espace à m dimensions. Par exemple une 3×2 matrice représente une application linéaire du plan (à 2 dimensions) dans l'espace à 3 dimensions. L'application est donnée en regardant un vecteur arbitraire $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ comme une 2×1 matrice et en multipliant :

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + 0y \\ 1x + 3y \\ -1x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ x + 3y \\ -x + 2y \end{pmatrix}$$

La somme de deux matrices correspond à la somme de deux applications :
$(f+g)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
La multiplication d'une matrice par un nombre correspond à la multiplication de l'application : $(\lambda f)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda(f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix})$. La multiplication des matrices correspond à la composition des applications : $(g \circ f)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = g(f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix})$

4.3. Déterminant

On peut essayer de résoudre un système d'équations :

$$\begin{cases} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{cases}$$

comme suite. On multiplie la première par d, la deuxième par b et on subtrait:

$$\begin{cases} adx + bdy &= ed \\ cbx + dby &= fb \end{cases} \Rightarrow \quad (ad - cb)x = ed - fb \quad \Rightarrow \quad x = \frac{ed - fb}{ad - cb}$$

De la même manière, si on multiplie la première équation par c et la deuxième par a, on obtient:

$$y = \frac{fa - ec}{ad - cb}.$$

En écrivant ces équations de manière matricielle, on voit que :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

La matrice

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

s'appelle *l'inverse* de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et la quantité $\det A := ad - bc$ le *déterminant* de A. On remarque que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et que} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Un cas spécial est lorsque $\det A = 0$; dans ce cas il y a soit aucune solution des équations, soit une infinité de solutions, par exemple:

$$\begin{cases} x + 2y & = & 2 \\ 3x + 6y & = & 6 \end{cases}$$

a une infinité de solutions : $y = \lambda$, $x = 2 - 2\lambda$, mais

$$\begin{cases} x + 2y & = & 2 \\ 3x + 6y & = & 5 \end{cases}$$

n'a aucune solution. On a $\det A = 0$ si et seulement si les lignes (ou les colonnes) de A sont *dépendantes*. Si le nombres de variables est plus grand, la matrice est alors de plus grande taille et ce méthode n'est plus efficace. Dans ce cas on peut appliquer *la méthode de pivot de Gauss*.

En général le déterminant d'une matrice carrée est calculée récursivement. On va illustrer la méthode pour une 3×3–matrice. On associe l'échiquier de signes alternées :

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Puis on développe le déterminant le long de n'import quelle ligne ou collonne comme suite : on multiplie le coefficient de la ligne i et collonne j par la signe associée et par le déterminant de la 2×2–matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= a \times \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \times \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \times \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= -b \times \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + e \times \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - h \times \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Dans la première expression on a développé le déterminant le long de la ligne 1, et dans la deuxième expression le long de la colonne 2. Bien evidemment, si une ligne ou colonne contient des zéros il est peut être plus simple de choisir cette ligne ou colonne pour effectuer le développement.

Propriétés du déterminant :
1. $\det I_n = 1$
2. $\det(A^t) = \det A$
3. $\det(AB) = \det A \det B$
4. $\det(cA) = c^n \det A$ si A est une $n \times n$–matrice et c une scalaire.
5. $\det A = 0 \Rightarrow$ qu'il existe une combinaison linéaire des lignes (colonnes) de A qui donne le vecteur $\overrightarrow{0}$.

4.4. La méthode de pivot de Gauss

Il s'agit d'un *algorithme*, c'est à dire une méthode sûre qui acheve son but dans un nombre fini d'étapes. On peut l'utiliser pour calculer l'inverse d'une matrice ou pour résoudre un système d'équations. On l'explique dans un exemple.

On suppose qu'on veut résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x-y+2z &=& 5\\ 3x+2y+z &=& 10\\ 2x-3y-2z &=& -10\end{array}\right.$$

On passe par les étapes suivants.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \underline{1} & -1 & 2 & 5\\ 3 & 2 & 1 & 10\\ 2 & -3 & -2 & -10\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 5\\ 0 & 5 & -5 & -5\\ 0 & -1 & -6 & -20\end{array}\right) \qquad (l2-3\times l1,\, l3-2\times l1)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 5\\ 0 & \underline{1} & -1 & -1\\ 0 & -1 & -6 & -20\end{array}\right) \qquad (l1/5)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 5\\ 0 & \underline{1} & -1 & -1\\ 0 & 0 & -7 & -21\end{array}\right) \qquad (l3+l2)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & \underline{1} & 3\end{array}\right) \qquad (l3/(-7)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & \underline{1} & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right) \qquad (l1-2\times l3,\, l2+l3)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right) \qquad (l1+l2)$$

La solution est alors $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$. En chaque étape, le pivot est le chiffre souligné. On applique la même méthode afin de calculer l'inverse de la matrice à gauche de la ligne verticale, en remplacant la colonne à droite par la matrice identité (voir la suite). La méthode s'applique aussi aux systèmes d'équations sous-déterminés, c'est à dire avec moins d'équations que variables.

4.5. La comatrice et l'inverse

Donnée une $n\times n$–matrice A, sa comatrice est une $n\times n$–matrice dont les coefficients sont les *cofacteurs* de A, où le ij–cofacteur est le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la ligne i et colonne j de A, multiplié par la signe associée à l'échiquier. Par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} e & f\\ h & i\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f\\ g & i\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} d & e\\ g & h\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix} b & c\\ h & i\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & c\\ g & i\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b\\ g & h\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix} b & c\\ e & f\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c\\ d & f\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & b\\ d & e\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

Une $n\times n$–matrice A telle que $\det A \neq 0$ a une inverse unique A^{-1} vérifiant $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Elle est donnée par

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\mathrm{com}A)^t$$

Pour des matrice de grande taille is est difficile d'utilise cette formule et la méthode de pivot de Gauss est plus pratique, illustrer comme suite :

$$\begin{gathered}(A|I_n)\\ \vdots\\ (I_n|A^{-1})\end{gathered}$$

On pose A à gauche et la matrice identité à droite, puis, par l'algorithme de la méthode de pivot de Gauss, on obtient la matrice identité à gauche ; ce qui apparait à droite est la matrice inverse.

4.6. **Exercices**

I. Soient A, B et C les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Parmi les produits proposés suivants :

$$AB, \quad BA, \quad AC, \quad CA, \quad BC, \quad CB$$

lesquels sont légitimes ? Dans les cas où le produit est bien défini, le calculer.

II. Soient A, B et C les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Parmi les produits proposés suivants :

$$AB, \quad BA, \quad AC, \quad CA, \quad BC, \quad CB$$

lesquels sont légitimes ? Dans les cas où le produit est bien défini, le calculer.

b) Calculer $A - 3C^t$.

III. Soient A et B les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits AB et BA, puis la différence $AB - BA$. Que peut-on remarquer conçernant la trace de $AB - BA$ (la trace d'une matrice carrée est la somme des coefficients de la matrice situés sur la diagonale joignant le coefficient en haut à gauche au coefficient en bas à droite : par exemple, la trace de B est 0 - 1 + 2 = 1) ?

IV. En appliquant la méthode de pivot de Gauss, résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} 3x & +y & +z & = & 1 \\ x & -y & & = & -1 \\ 5x & +y & +z & = & 2 \end{array} \right.$$

V. Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer son déterminant, sa comatrice et son inverse, puis, calculer l'inverse en appliquant la méthode de pivot de Gauss. Enfin, résoudre le système d'équations de la question IV en multipliant les parties gauches et droite par A^{-1} :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

VI. Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer son déterminant, sa comatrice et son inverse, puis, calculer l'inverse en appliquant la méthode de pivot de Gauss.

5. **Calcul intégral**

Le calcul intégral permet de calculer l'aire d'une région, le volume de liquide sortant d'une région/sec.,... toute quantité qui implique une somme continue sur une région.

On se rappelle que donne une fonction $f(x)$ d'une variable réelle x, sa dérivée est définie comme la limite :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Elle représent le taux d'accroissement de la fonction au point x.

Le calcul de primitive est l'opération inverse du calcul de dérivée.

5.1. **Primitives**

Soit $f(x)$ une fonction d'une variable réelle x. Une *primitive* de $f(x)$ (ou l'intégral indéfinie de $f(x)$) est une fonction $F(x)$ telle que sa dérivée $F'(x) = f(x)$. Une primitive n'est que définie à l'ajoute d'une constante additive près. En effet, si $F(x) = C$ constante, alors $F'(x) = 0$. On écrit une primitive de $f(x)$ comme $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Bien evidemment $\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$ (C constante).

Exemple : Une primitive de $f(x) = x^2$ est $x^3/3$ car la dérivée $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3/3) = x^2$.

Rappel sur les fonctions hyperboliques :

$$\mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \mathrm{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \mathrm{th}\, x = \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,.$$

Propriétés :

$$(\mathrm{sh}\,)'(x) = \mathrm{ch}\, x, \qquad (\mathrm{ch}\,)'(x) = \mathrm{sh}\, x, \qquad (\mathrm{th}\,)'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$$

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1, \qquad \mathrm{ch}\, 2x = 2\mathrm{ch}^2 x - 1, \qquad \mathrm{sh}\, 2x = 2\mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, x\,.$$

Liste de primitives

Dans la suite C est une constante arbitraire.

$$\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1) \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int e^{\alpha x}\mathrm{d}x = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + C \qquad \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\cot x + C \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\,\cos x} = \ln|\tan x| + C$$

$$\int \mathrm{sh}\, x\,\mathrm{d}x = \mathrm{ch}\, x + C \qquad \int \mathrm{ch}\, x\,\mathrm{d}x = \mathrm{sh}\, x + C \qquad \int \mathrm{th}\, x\,\mathrm{d}x = \ln \mathrm{ch}\, x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}\, x} = \ln\left|\mathrm{th}\,\frac{x}{2}\right| + C \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}\, x} = 2\arctan(e^x) + C \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{th}\, x} = \ln|\mathrm{sh}\, x| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\, x + C \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}^2 x} = -\coth x + C \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, x} = \ln|\mathrm{th}\, x| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{|a|} + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \operatorname{argsh}\frac{x}{|a|} + C = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \operatorname{argch}\frac{x}{a} + C = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$$

$$\int \cos x \, \sin^n x \, \mathrm{d}x = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C \qquad \int \sin x \, \cos^n x \, \mathrm{d}x = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C$$

Intégral définie : Il s'agit d'une intégrale avec limites (ou bornes) :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := F(b) - F(a)$$

où $F(x)$ est une primitive de $f(x)$; elle représent l'aire sous le graphe de la fonction $f(x)$ entre $x = a$ et $x = b$.

5.2. Intégration par parties

La formule de la dérivée d'un produit: $(uv)'(x) = u(x)v'(x) + u'(x)v(x)$ nous amène à la formule de l'intégration par parties, soit pour l'intégrale indéfinie, soit pour l'intégral définie :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Cette formule nous permet parfois d'éliminer des termes difficiles à intégrer, par exemple, dans le calcul de la primitive $\int x \ln x \, \mathrm{d}x$, on peut poser $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x$, d'où :

$$\int x \ln x = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{1}{x}\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

5.3. Changement de variable

La formule du changement de variable dans une intégrale, se déduit de la formule pour la dérivee d'une fonction composée : $(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ (où F est une primitive de f).

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

où φ est une fonction numérique définie sur $[a, b]$ de dérivée continue (on laisse cette affirmation comme une exercice).

<u>Exemple</u> Calculer la primitive $\int s\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$. On pose $u^2 = 1 + x^2$, d'où $2u\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x \Rightarrow u\mathrm{d}u = x\mathrm{d}x$. On en déduit que

$$\int x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x = \int u^2 \mathrm{d}u = \frac{u^3}{3} + C = \frac{(1+x^2)^{3/2}}{3}$$

5.4. **Exercices**

I. Calculer les primitives suivantes :

$$\int x^4\,\mathrm{d}x,\quad \int \sin x\,\mathrm{d}x,\quad \int \cos x\,\mathrm{d}x,\quad \int \tan x\,\mathrm{d}x,\quad \int (1+x)^2\,\mathrm{d}x$$

II. Calculer les primitives suivantes :

$$\int \sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x,\quad \int \frac{(1+x)^3}{x}\,\mathrm{d}x,\quad \int (1-x^2)\,\mathrm{d}x,\quad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x,\quad \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

III. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 x\,e^{2x}\,\mathrm{d}x,\quad \int_0^1 x^2e^{-x}\,\mathrm{d}x,\quad \int_0^1 \arctan(x)\,\mathrm{d}x,\quad \int_0^\pi x\sin(3x)\,\mathrm{d}x,\quad \int_0^\pi x^2\sin x\,\mathrm{d}x,\quad \int x\arctan(x)\,\mathrm{d}x.$$

IV. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,\quad \int_0^1 x^3\sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x,\quad \int_0^1 xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x,\quad \int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(1+x^2)\,\mathrm{d}x,\quad \int_0^{1/2} \frac{x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

V. Calculer les intégrales suivantes en effectuant un changement de variables :

$$\int_0^t x\,\sin(1+x^2)\,\mathrm{d}x \quad (u=1+x^2),\qquad \int_0^t \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x \quad (u=\sqrt{1+x})\,.$$

VI. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{-1}^2 x\,|x|\,\mathrm{d}x,\qquad \int_0^1 \frac{1}{(4x+2)^2+1}\,\mathrm{d}x,\qquad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_{-1}^1 e^{-|x|}\,\mathrm{d}x,\qquad \int_0^2 |x^2-1|\,\mathrm{d}x,\qquad \int_0^{2\pi} x\cos^2 x\sin x\,\mathrm{d}x.$$

6. Calcul différentielle en plusieurs variables

On a souvent besoin de considérer des fonctions de plusieurs variables : temperature dans une plaque ; champ de velocité d'une fluide ; carte topographique indiquant les isoplèthes (lignes joignant des points d'égale valeur)... Dans la suite on s'interesse aux points extremaux de telles fonctions et les directions d' accroissment maximal (normales aux courbes de niveaux).

6.1. Dérivée partielle

Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables - les définitions s'adaptent facilement au cas d'un nombre de variables quelconque. Les dérivées partielles en un point $(x, y) = (a, b)$ sont défiinies par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) := \lim_{h\to o} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) := \lim_{k\to o} \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}$$

Afin de calculer $\partial f/\partial x$ on considère y comme une constante et on calcule la dérivée par rapport à x ; de façon similaire on calcule $\partial f/\partial y$. Si on laisse a et b varier, en les notant par x et y respectivement, on obtient deux nouvelles fonctions de x et y notées $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$. On peut ainsi calculer les dérivées de ces nouvelles fonctions:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Exemple Soit $f(x, y) = 2x^2y + xy^3 - x + 3$. Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy + y^3 - 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 3xy^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4x + 3y^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6xy$$

Théorème de Schwarz Sous la condition de continuité des secondes dérivées, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

6.2. Recherche d'extremum

Un *point critique* d'une fonction $f(x, y)$ est un point (a, b) où les dérivées partielles s'anullent : $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$. Dans l'exemple ci-dessus, on voit que le point $(x, y) = (0, 1)$ est un point critique.

Des exemples des points critiques sont les extrema locaux : ce sont les points (a, b) où la fonction prend une valeur maximale ou minimale, au moins dans un voisinage de (a, b). La recherche des tels points est très importante dans les applications. Afin d'étudier si un point critique est un maxmum, minimum ou ni l'un ni l'autre on considère le developpement limitées de la fonction :

$$f(a+h, b+k) = f(a, b)+hf_x(a, b)+kf_y(a, b)+\frac{1}{2}\left(h^2 f_{xx}(a, b) + 2hk2f_{xy}(a, b) + y^2 f_{yy}(a, b)\right)+o(h^2+k^2)$$

où pour faciliter la notation on écrit $f_x(a, b)$ pour $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$, f_{xx} pour $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$ etc. On voit alors qu'en un point critique ce sont les secondes dérivées qui déterminent la nature de ce point. En effet, si le terme entre paraenthèses est positif quelque soit $(h, k) \neq (0, 0)$, il s'agit d'un minimum local, s'il est négative il s'agit d'un maximum local et s'il change de signe, il s'agit d'un point de selle.

On définit la matric hessienne (ou simplement la hessienne) :

$$H(f)(a,b) := \begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix}$$

Soit $D(a, b) = \det(H(f)(a, b)) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2$. Alors

- si $D(a, b) > 0$ et $f_{xx}(a, b) > 0$ alors (a, b) est un minimum local de f ;
- si $D(a, b) > 0$ et $f_{xx}(a, b) > 0$ alors (a, b) est un maximum local de f ;
- si $D(a, b) < 0$ alors (a, b) est un point de selle de f ;

- si $D(a,b) = 0$ alors ce teste est non concluant.

Dans l'exemple, on voit qu'au point critique $(x,y) = (0,1)$, la hessienne est donnée par

$$H(f)(0,1) := \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

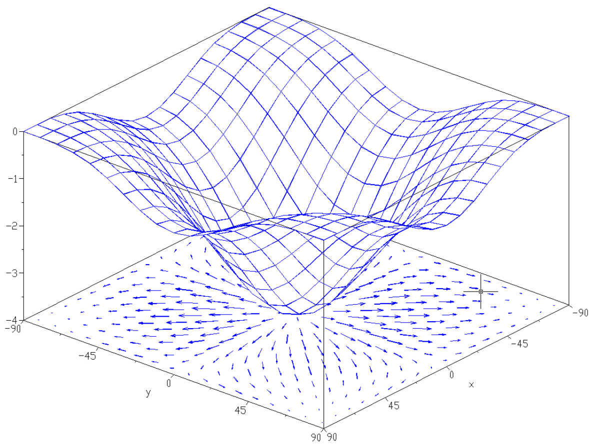
dont le déterminant est -9 et donc il s'agit d' un point de selle.

6.3. Le gradient

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, un champ de vecteurs $\overrightarrow{v}$ est une application $\overrightarrow{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: à chaque point (x,y) du plan on associe alors un vecteur $\overrightarrow{v}(x,y)$. Afin de visualiser ce vecteur on suppose que son point de départ est (x,y) est son point d'arrivée est $(x,y) + \overrightarrow{v}(x,y)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1(x,y) \\ v_2(x,y) \end{pmatrix}$$

Un champ de vecteurs est utile pour représenter la motion d'une fluide : en un point (x,y) (et temps t) le vecteur $\overrightarrow{v}(x,y)$ donne la direction et velocité de la particule qui se trouve à (x,y) au temps t ($||\overrightarrow{v}(x,y)||$ = velocité). (Eventuellement on prolonge la définition aux fonctions de trois variables de la manière evidente).



Donnée une fonction $f(x,y)$ on associe un champ de vecteurs grad f (ou $\overrightarrow{\nabla} f$) défini en chaque point (x,y) par $\operatorname{grad} f(x,y) := \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix}$. Ce champ est orthogonal aux niveaux de f (les courbes reliant les points ayant la même valeur). Dans l'exemple $f(x,y) = 2x^2y + xy^3 - x + 3$, le gradient est le champ de vecteurs :

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 4xy + y^3 - 1 \\ 2x^2 + 3xy^2 \end{pmatrix}$$

Le gradient représent la direction de plus grande croissance de la fonction.

6.4. **Exercices**

I. Calculer les dérivées partielles jusqu' au second ordre des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$.
2. $f(x, y) = (x + y)^2$.
3. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
4. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2$.
5. $f(x, y, z) = xyz + x^2y + 2zy + 5x + 2z$.

II. Soit $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 1$. Déterminer les points critiques de f ; étudier ses extrema locaux.

III. Déterminer les extrema locaux des fonctions $f(x, y)$ suivantes :

1. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.
2. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 5$.
3. $f(x, y) = x^3 + y^3$.
4. $f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$.

IV. Pour chacune des fonctions suivantes étudier la nature du point critique donné :

1. $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6$ au point critique $(0, 0)$.
2. $f(x, y) = x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + 3xy + y^2 + 10$ au point critique $(0, 0)$.

V. Calculer le gradient des fonctions de l'exercice I.

VI. Soient $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ et $g(x, y) = x^2 - y^2 - 1$. Calculer les gradients $\vec{\nabla} f$ et $\vec{\nabla} g$, puis le produit scalaire $\vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} g$. Trouver tous les points où ce produit scalaire s'annulle.

7. La méthode des moindres carrés

On va motiver la méthode par un exemple. On suppose qu'on a pris quatre mesures en $x = 1, 2, 3, 4$ avec les resultats $y = 6, 5, 7, 10$ respectivement. On aimerait donner une prediction pour $x = 10$. On va chercher une droite $y = \beta_1 + \beta_2 x$ qui approxime le mieux ces mesures. Bien evidemment le système

$$\begin{aligned} \beta_1 + 1\beta_2 &= 6 \\ \beta_1 + 2\beta_2 &= 5 \\ \beta_1 + 3\beta_2 &= 7 \\ \beta_1 + 4\beta_2 &= 10 \end{aligned}$$

est surdéterminé et n'a pas de solution exacte. On cherche alors la meilleure approximation en minimisant la somme des carrés des restes :

$$\begin{aligned} S(\beta_1, \beta_2) &= [6 - (\beta_1 + 1\beta_2)]^2 + [5 - (\beta_1 + 2\beta_2)]^2 + [7 - (\beta_1 + 3\beta_2)]^2 + [10 - (\beta_1 + 4\beta_2)]^2 \\ &= 4{\beta_1}^2 + 30{\beta_2}^2 + 20\beta_1\beta_2 - 56\beta_1 - 154\beta_2 + 210 \end{aligned}$$

On calcule

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_1} = 8\beta_1 + 20\beta_2 - 56 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial S}{\partial \beta_2} = 20\beta_1 + 60\beta_2 - 154 = 0$$

avec solution $\beta_1 = 3,5$ et $\beta_2 = 1,4$. Pour la prédiction en $x = 10$ on sustitue $x = 10$ dans l'expression $y = 3,5 + 1,4x$ et on obtient $y = 17,5$.

On aurait pu choisir une autre fonction comme modèle, par exemple une parabole $y = \beta_1 x^2$. Dans ce cas la somme des carrés des restes est donnée par

$$\begin{aligned} S(\beta_1) &= (6 - \beta_1)^2 + (5 - 4\beta_1)^2 + (7 - 9\beta_1)^2 + (10 - 16\beta_1)^2 \\ &= 210 - 498\beta_1 + 354{\beta_1}^2 \end{aligned}$$

Pour minimiser cette fonction on calcule $\partial S/\partial\beta_1 = -498 + 708\beta_1$, qu'on pose égale à zéro pour obtenir $\beta_1 = 498/708 \sim 0,7$. Cette fois-ci la prédiction en $x = 10$ est $y = 70$.

Le choix de fonction $f(x, \beta) = f(x, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ (on écrit $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$) dépend des critères physiques. Bien evidemment il faut que le nombre de paramètres $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ est inférieur au nombre de mesures $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ afin que le système soit surdéterminé.

Dans le cadre général, on écrit $r_i = y_i - f(x_i, \beta)$ pour les restes. Alors $S(\beta) = \sum_i {r_i}^2$ et on résout

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_j} = 2\sum_i r_i \frac{\partial r_i}{\partial \beta_j} = -2\sum_i r_i \frac{\partial f(x_i, \beta)}{\partial \beta_j} = 0\,, \qquad j = 1, \ldots m$$

Par exemple, si la fonction $f(x, \beta)$ dépend de manière linéaire sur les paramètres (modèle de regression) :

$$f(x, \beta) = \sum_{j=1}^{m} \beta_i \varphi_j(x)$$

où les fonctions φ_j ne dépend que de x, si on pose

$$X_{ij} = \frac{\partial f(x_i \beta)}{\partial \beta_j} = \varphi_j(x_i)$$

alors la solution s'exprîme comme

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = (X^t X)^{-1} X^t \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Paul Baird