$\tan : \{z\in\mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Re}\, z \leq \frac{\pi}{2}\}\setminus\{\frac{\pi}{2}\} \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}$$

Soit $w\in\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$, alors $\frac{1}{i}\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1} = w$

$\iff e^{2iz}-1 = iw(e^{2iz}+1)$

$\iff e^{2iz}(1-iw) = 1+iw$

$\iff e^{2iz} = \frac{1+iw}{1-iw}$ Puisque $w\neq i,-i$, la partie droite prend ni la valeur 0, ni la valeur ∞.

Soit $w=u+iv$, alors $\frac{1+iw}{1-iw} = \frac{1-v+iu}{1+v-iu} = \frac{((1-v)+iu)(1+v+iu)}{(1+v)^2+u^2}$

$$= \frac{(1-v)(1+v)-u^2+2iu}{(1+v)^2+u^2} = \frac{1-v^2-u^2+2iu}{(1+v)^2+u^2}$$

Alors, si ~~$1-v^2-u^2=0$ et $u<0$~~ $u=0$ et $1-v^2-u^2<0$

$\Rightarrow 1-v^2<0$

On montre d'abord que $\tan z$ est injective dans $U=\{z\in\mathbb{C} \mid -\pi/2 < \mathrm{Re}\, z \leq \pi/2\}\setminus\{\pi/2\}$

Alors $\tan z_1 = \tan z_2 \iff e^{2iz_1} = e^{2iz_2}$

$\iff e^{2i(z_1-z_2)} = 1$

Mais les seules solutions de $e^z=1$ sont $z=2k\pi i$

Alors $2i(z_1-z_2) = 2k\pi i \iff z_1-z_2 = k\pi$

ce qui est impossible dans U par $k\neq 0$: en effet $z_1,z_2\in U \Rightarrow |\mathrm{Re}(z_1-z_2)|<\pi$

Donc $k=0$ et $z_1=z_2$

On montre qu'elle est surjective : Pour $w\in\mathbb{C}\setminus\{u+iv \mid u=0, v^2\geq 1\}$

Soit $2iz = \ln_0\left(\frac{1+iw}{1-iw}\right) \in \{z\in\mathbb{C} \mid -\pi < \mathrm{Im}\, z < \pi\}$

c à d : $-\pi < \mathrm{Im}\, 2iz < \pi \iff -\pi/2 < \mathrm{Re}\, z < \pi/2$

Si $u=0$ et $v^2\geq 1$ $\quad (u=0,\ v=\pm 1 \iff w=\pm i)$

~~Soit $2iz=$~~ alors $\frac{1+iw}{1-iw}\in\{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z=0, \mathrm{Re}\, z<0\}$ donc $\arg z = +\pi$

Alors soit $2iz = \ln_{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+iw}{1-iw}\right)$ dont ~~l'imaginaire $=\pi$~~ partie imaginaire $=\pi$

Donc la partie réelle de $z = \pi/2$ et la partie réelle $\neq 0$ et la partie imaginaire est $\neq 0$

d'où $z\in U$.