M1 Variable complexe écrit - DMAP8VCO

Mardi 9 mai 2017, 09h00–12h00 (3h)

Polycopie du cours seul document autorisé.

Toute réponse doit être justifiée.

Usage de calculettes, d'ordinateurs portables et de téléphones portables interdit.

I. Calculer

$$\int_{C(0,1)} \frac{1}{(2z-1)(z-2)}\,\mathrm{d}z\,,$$

où $C(0,1)$ est le cercle unité orienté dans le sens direct.

(2 points)

II. Montrer que toutes les racines du polynôme

$$z^4 + 2z^3 + 2z + 1$$

se trouvent dans la coronne $\frac{1}{3} < |z| < 3$. (3 points)

III. Déterminer les zéros de la fonction $z \mapsto 1 - \exp\left(\frac{z}{z-1}\right)$ dans le disque ouvert $D(0,1)$. Cela contredit-il le principe des zéros isolés (Théorème 3.13 de la polycopie) ?

(3 points)

IV. (a) Pour $w = u + \mathrm{i}v \in \mathbf{C} \setminus \{\pm 1\}$, exprîmer $\dfrac{1+w}{1-w}$ en forme polaire $re^{\mathrm{i}\theta}$.

(b) Soit $f(z) = \operatorname{th} z = (e^z - e^{-z})/(e^z + e^{-z})$. Montrer que f applique $\mathbf{C}$ surjectivement sur $\mathbf{C} \setminus \{\pm 1\}$.

(c) En déduire un sous-ensemble $D \subset \mathbf{C}$ sur lequel $f : D \to \mathbf{C} \setminus \{\pm 1\}$ est bijective (on peut applique la partie (a) de cette question).

(5 points)

SUITE...

V. On suppose que f est holomorphe dans un ouvert simplement connexe U sauf en un nombre fini de pôles. Soit $\gamma : [0,1] \to U$ un chemin continu fermé. On suppose que $\{z \in U : ord(f,z) \neq 0\}$ est un ensemble fini $\{z_1, \ldots, z_n\}$ disjoint de $\gamma([0,1])$. On écrit

$$ZP(f,\gamma) := \sum_{j=1}^{n} ord(f,z_j) ind(\gamma, z_j)$$

où $ind(\gamma, z_j)$ est l'indice de γ par rapport à z_j.

Soit g une fonction holomorphe dans U sauf en un nombre fini de pôles disjoints de $\gamma([0,1])$. On suppose que pour tout $z \in \gamma([0,1])$ on a $|g(z)| < |f(z)|$.

(a) Montrer que $\inf\{|f(z)| - |g(z)| : z \in \gamma([0,1])\} = \delta > 0$.

Pour chaque t vérifiant $0 \leq t \leq 1$, soit

$$E(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(z) + tg'(z)}{f(z) + tg(z)} \mathrm{d}z$$

(b) Montrer que $f(z) + tg(z)$ ne présente aucun zéro ou pôle dans $\gamma([0,1])$ et que par suite $E(t)$ est bien définie et prend ses valeurs dans les entiers.

(c) Montrer que pour $0 \leq t < u \leq 1$ et $z \in \gamma([0,1])$, on a

$$\left| \frac{(f' + ug')(z)}{(f+ug)(z)} - \frac{(f'+tg')(z)}{(f+tg)(z)} \right| \leq \frac{u-t}{\delta^2} |(f'g - fg')(z)|$$

et par suite que $|E(u) - E(t)| \leq k(u-t)$ pour une constante k indépendante de t et u.

(d) En déduire que $E(1) = E(0)$ et que $ZP(f+g, \gamma) = ZP(f, \gamma)$.

(e) Calculer $\int_\gamma (f'(z)/f(z)) \mathrm{d}z$ où $f(z) = \dfrac{(z+\mathrm{i})^3}{(z-3)(z-i)^4}$ et γ est le cercle de rayon 2 centré en $z = 0$ parcouru dans le sens direct.

(7 points)

Rappel : Soit $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ le developpement de Laurent d'une fonction f dans un disque pointé $D(a,r) \setminus \{a\}$ (r assez petit). Alors $ord(f,a)$ est le plus petit entier n tel que $a_n \neq 0$ et $a_N = 0$ pour tout $N < n$.

FIN