M1 Variable complexe écrit - DPMF8VCO

Mercredi 2 mai 2018, 14h00–17h00 (3h)

Polycopie du cours seul document autorisé.

Toute réponse doit être justifiée.

Usage de calculettes, d'ordinateurs portables et de téléphones portables interdit.

I. Calculer

$$\int_{C(0,1)} \frac{1}{(2z-\mathrm{i})(z+2)}\,\mathrm{d}z\,,$$

où $C(0,1)$ est le cercle unité orienté dans le sens direct.

(2 points)

II. Montrer que toutes les racines du polynôme

$$z^4 + 4z^3 + 4z + 1$$

se trouvent dans la coronne $\frac{1}{5} < |z| < 5$. (2 points)

III. Déterminer les zéros de la fonction $z \mapsto 1 - \exp\left(\dfrac{z}{z-1}\right)$ dans le disque ouvert $D(0,1)$. Cela contredit-il le principe des zéros isolés (Théorème 3.13 de la polycopie) ?

(2 points)

IV. Soit $f(z) = \dfrac{1}{1-z-z^2}$.

1. Trouver les pôles de f ainsi que les residues de f en ces pôles.

2. Trouver la valeur de

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$$

où $\gamma(t) = 2e^{\mathrm{i}t},\ t \in [0, 2\pi]$.

3. Soit

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

la representation de f comme une série entière en z.

a) Trouver le rayon de convergence de cette série.

b) Montrer que $\{a_i\}$ coincide avec la suite de Fibonacci, c'est à dire, $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{j+2} = a_j + a_{j+1}$ si $j > 2$. (Indication : on pourrait utiliser des expressions intégrales pour les coefficients a_j.)

(5 points)

SUITE...

V. Pour $z \neq 0$, soit $f(z) = e^{1/z} - \dfrac{1}{z}$.

1) Représenter $f(z)$ comme une série entière en $\dfrac{1}{z}$ et montrer que cette série converge uniformément sur le support de chaque chemin (continu) $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

2) Montrer que f possède une primitive F sur $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ et exprimer F comme une série entière en $\dfrac{1}{z}$.

3) Soit γ le cercle de centre 0 et de rayon 1 parcouru une fois dans le sens direct. Calculer

$$\int_\gamma e^{1/z} \mathrm{d}z \,.$$

(4 points)

V. Soit $U = \mathbf{C} \setminus \{\mathrm{i}y : y \in \mathbf{R},\ |y| \geq 1\}$.

1) Montrer qu'il existe une unique fonction φ holomorphe sur U telle que :

$$e^{\varphi(z)} = z^2 + 1, \quad \forall z \in U \text{ et } \varphi(0) = 0\,.$$

2) a) En déduire qu'il existe une unique fonction f holomorphe sur U telle que :

$$f(z)^2 = z^2 + 1, \quad \forall z \in U \text{ et } f(0) = 1\,.$$

b) Montrer que $f(z) = f(-z),\ \forall z \in U$.

c) Montrer que $z + f(z) \in \mathbf{C} \setminus \mathrm{i}\mathbf{R}^+,\ \forall z \in U$.

d) En déduire qu'il existe une fonction g holomorphe sur U telle que :

$$e^{g(z)} = z + f(z), \quad \forall z \in U\,.$$

3) Montrer enfin que $\operatorname{sh}(g(z)) = z$, $\forall z \in U$ ($\operatorname{sh} z = (e^z - e^{-z})/2$).

(5 points)

FIN