

M1 Variable complexe – Feuille de TD 1 – Paul Baird

§1. Notions de base

1. (les complexes) (i) Soit $\operatorname{Im} a, \operatorname{Im} b > 0$. Montrer que $\left| \frac{a-b}{a-\bar{b}} \right| < 1$;
(ii) Pour des nombres complexes a, b , montrer que

$$|1 - \bar{a}b|^2 - |a - b|^2 = (1 - |a|^2)(1 - |b|^2).$$

en déduire que si $|a| < 1$ et $|b| < 1$ alors

$$\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| < 1.$$

- (iii) Soit $f(x+iy) = xy/(x^2+y^2)$ pour $x+iy \neq 0$. Est-ce-que $f(z)$ présente une limite lorsque $z \rightarrow 0$?

2. (suites) (i) Montrer que toute suite convergente dans \mathbf{C} est bornée.
(ii) Si $a_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, montrer que $(a_1 + \dots + a_n)/n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

3. (séries) (i) Donner un exemple d'une série entière qui converge pour tout $z \in \mathbf{C}$, puis une qui ne converge que lorsque $z = 0$.

- (ii) On suppose que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = S(z)$ pour tout $|z| < R$, où $R > 0$. Si $S(x)$ est réelle pour tout x réel avec $|x| < R$ montrer que chaque a_n réel. Si $S(z)$ est paire, montrer que $a_n = 0$ pour tout n impaire.

- (iii) Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ n'est pas uniformément convergente sur $D(0, 1) := \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$.

4. (fonction zeta de Riemann) Soit $\zeta(z)$ la fonction zeta de Riemann

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

- (i) Montrer que la somme converge absolument pour tout z avec $\operatorname{Re} z > 1$ et calculer sa dérivée.

- (ii) Montrer que lorsque la somme converge on a l'identité :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - p^{-z}}.$$

Indication : $\frac{1}{1 - p^{-z}} = 1 + \frac{1}{p^z} + \frac{1}{p^{2z}} + \dots + \frac{1}{p^{kz}} + \dots$,

puis comparer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} - \prod_{p \leq q} \frac{1}{1 - p^{-z}}$ avec $\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ ($x = \operatorname{Re} z$) pour un q donné.

SUITE...

²
5. (séries) Soit $S(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . Montrer que pour tout $r < R$ on a

$$\int_0^{2\pi} |S(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 r^{2n}.$$

Montrer que si $R = \infty$ et si S est une fonction bornée dans \mathbf{C} , alors S est forcément constante.

6. (sphère de Riemann) Soit $\sigma : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbf{C}$ la projection stéréographique. Quelle est l'image par σ d'un cercle Γ de S^2 (privé éventuellement de son pôle nord si $N \in \Gamma$).

7. (cercles) Soit Γ un sous-ensemble de \mathbf{C} . Montrer que Γ est un cercle de \mathbf{C}_∞ si et seulement si il existe $\alpha, \delta \in \mathbf{R}, \beta \in \mathbf{C}$ avec $|\beta|^2 - \alpha\delta > 0$ tels que

$$\Gamma = \{z \in \mathbf{C} \mid \alpha|z|^2 + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \delta = 0\}$$

(on entend ici par cercle dans \mathbf{C}_∞ un cercle de \mathbf{C} ou une droite passant à l'infini).

8. (homographies) Une homographie est une application $f : \mathbf{C}_\infty \rightarrow \mathbf{C}_\infty$ de la forme :

$$f(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{si } z \in \mathbf{C} \setminus \{-d/c\} \\ \infty & \text{si } z = -d/c \\ a/c & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

où $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ sont tels que $ad - bc \neq 0$.

(i) Montrer que si $c \neq 0$ on a

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c^2} \frac{1}{z + \frac{d}{c}}.$$

En déduire que f peut s'écrire comme la composée d'une similitude directe (Une transformation qui multiplie toutes des distance par une constante fixe et qui préserve l'orientation), d'une inversion ($z \mapsto 1/z$) et de deux translations.

(ii) Montrer que toute homographie est un homéomorphisme de \mathbf{C}_∞ sur lui-même.

(iii) Montrer que l'image par une homographie d'un cercle ou d'une droite est un cercle ou une droite.