M1 Variable complexe – Feuille de TD 5 – Paul Baird

§5. Points singuliers et la série de Laurent.

Dans ce chapitre, pour une fonction $f(z)$ avec série de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ telle que $a_n \neq 0$ pour un nombre fini de $n < 0$, on écrit $\mathrm{ord}(f, a)$ pour le plus petit entier n pour lequel $a_n \neq 0$. Dans ce cas on dit que f est d'ordre fini en $z = a$. Si $a_n \neq 0$ pour un nombre infini de $n < 0$, on dit que f présente une singularié essentielle en $z = a$.

1. Étudier les singularités et les zéros de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}$$

2. Trouver la série de Laurent de la fonction $f(z) = e^{1/z}$.

3. Soient f et g des fonctions d'ordre fini en $z = a$. Montrer que

a) $\mathrm{ord}(fg, a) = \mathrm{ord}(f, a) + \mathrm{ord}(g, a)$;

b) $\mathrm{ord}(1/f, a) = -\mathrm{ord}(f, a)$;

c) si $\mathrm{ord}(f, a) < \mathrm{ord}(g, a)$, alors $\mathrm{ord}(f + g, a) = \mathrm{ord}(f, a)$.

d) Si $a = 0$ et f est paire (impaire), que $\mathrm{ord}(f, 0)$ est pair (impair).

4. Soit $f(z) = 1/z(z^2 + 1)$. Écrire la série de Laurent pour f dans le disque pointé $D(0, 1) \setminus \{0\}$ et aussi dans l'ensemble $\{z : |z| > 1\}$.

5. Trouver toutes les singularités des fonctions suivantes en précisant l'ordre de leurs pôles :

$$\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^2+1}, \quad \frac{z}{\sin z}, \quad e^{z+(1/z)}, \quad \frac{1}{e^{z^2} - 1}$$

6. Montrer que la fonction $\tan(1/z)$ présente une singularité non-isolée en $z = 0$.

7. Soit $B \subset \mathbf{C}$ borné. Montrer que la fonction $\exp(\mathbf{C} \setminus B) = \mathbf{C} \setminus \{0\}$. En déduire que $\cos(\mathbf{C} \setminus B) = \mathbf{C}$.

8. Soit f entière et supposons qu'il existent $k > 0$, $R > 0$ et un entier positif n tels que $|f(z)| \geq k|z|^n$ lorsque $|z| > R$. Montrer que f est polynomiale. Que peut-on dire sur le degré de f ?

9. Soit f holomorphe dans $\mathbf{C}$ sauf en un nombre fini de points. Supposons que $zf(z) \to 0$ lorsque $z \to \infty$. Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que $\{z^2 f(z) : |z| > R\}$ est borné.