

M1 Variable complexe – Feuille de TD 6 – Paul Baird

§6. Zéros, pôles et le théorème de Rouché.

1. Montrer que

$$\int_{C(0,2)} \frac{e^{az}}{1+z^2} dz = 2\pi i \sin a$$

2. On se rappelle que  $\text{ord}(f, a)$  est le plus petit entier  $n$  tel que  $a_n \neq 0$  dans la série de Laurent de  $f$  en  $z = a : \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ . Si  $\text{ord}(f, a) = k > 0$  et  $\text{ord}(g, a) = k+1$ , montrer que

$$\text{res}(f/g, a) = (k+1) \frac{f^{(k)}(a)}{g^{(k+1)}(a)}$$

3. Trouver les résidus des fonctions suivantes aux points indiqués :

$$\frac{e^{iz}}{z^3+z} \text{ en } i \text{ et } 1, \quad \frac{1}{1-\cos z} \text{ en } 0, \quad \frac{1}{(z-1)^2(z+1)} \text{ en } 1, \quad \frac{1}{z-\sin z} \text{ en } 0.$$

4. (i) Montrer que si  $\text{ord}(f, a) = -1$  et  $\text{ord}(g, a) = 0$ , alors  $\text{res}(fg, a) = g(a)\text{res}(f, a)$ .

(ii) Montrer que si  $\text{ord}(f, a) = 0$  et  $\text{ord}(g, a) = 1$ , alors  $\text{res}(f/g, a) = f(a)/g'(a)$ .

(iii) Montrer par un exemple, que (i) n'est plus vraie si  $\text{ord}(f, a) \leq -2$ .

5. Montrer que le polynôme  $z^4 + 26z + 2$  présente exactement trois zéros dans la couronne  $5/2 < |z| < 3$ .

6. Estimer une couronne  $R_1 < |z| < R_2$  qui contient toutes les racines du polynôme palindromique  $15z^4 + 18z^2 + 15$ .

7. On suppose que  $f$  holomorphe dans un ouvert  $U$  simplement connexe sauf en un nombre fini de pôles. Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  un chemin continu fermé. On suppose aussi que  $\{z \in U : \text{ord}(f, z) \neq 0\}$  est un ensemble fini  $\{z_1, \dots, z_n\}$  disjoint de  $\gamma([0, 1])$ . On écrit

$$ZP(f, \gamma) := \sum_{j=1}^n \text{ord}(f, z_j) \text{ind}(\gamma, z_j)$$

où  $\text{ind}(\gamma, z_j)$  est l'indice de  $\gamma$  par rapport à  $z_j$ .

Soit  $g$  une fonction holomorphe en  $U$  sauf en un nombre fini de pôles disjoints de  $\gamma([0, 1])$  et que pour tout  $z \in \gamma([0, 1])$  on a  $|g(z)| < |f(z)|$ .

(i) Montrer que  $\inf\{|f(z)| - |g(z)| : z \in \gamma([0, 1])\} = \delta > 0$ .

Pour  $0 \leq t \leq 1$ , soit

$$E(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z) + tg'(z)}{f(z) + tg(z)} dz$$

(ii) Montrer que  $E(t)$  est bien définie et prend ses valeurs dans les entiers.

<sup>2</sup>

(iii) Montrer que pour  $0 \leq t < u \leq 1$  et  $z \in \gamma([0, 1])$ , on a

$$\left| \frac{(f' + ug')(z)}{(f + ug)(z)} - \frac{(f' + tg')(z)}{(f + tg)(z)} \right| \leq \frac{u - t}{\delta^2} |f'g - fg'(z)|$$

et par suite que  $|E(u) - E(t)| \leq k(u - t)$  pour une constante  $k$  indépendante de  $t$  et  $u$ .

(iv) Montrer que si  $u - t < 1/k$  alors  $|E(u) - E(t)| < 1$  et donc  $E(u) = E(t)$ .

(v) En déduire que  $E(1) = E(0)$  et que  $ZP(f + g, \gamma) = ZP(f, \gamma)$ .