M1 Variable complexe – Feuille de TD 7 – Paul Baird

§5. Fonctions elliptiques

1. Étudier la continuation unique de la fonction holomorphe $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ le long du cercle $|z| = 2$. Montrer que $f(z)$ détermine deux fonctions holomorphes dans le plan privé du segement droit joignant -1 à 1.
Montrer que la fonction $f(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)}$ $(a, b \in \mathbf{C},\ a \neq b)$ peut être prolonger en une fonction holomorphe dans le plan privé du segement droit joignant a à b dès qu'on connait sa valeur en un point.

2. Montrer que l'aire d'un parallélogramme avec côtés z_1 et z_2 est donnée par $|\mathrm{Im}\,(z_1\overline{z_2})|$.

3. Montrer que la dérivée d'une fonction elliptique est elliptique avec les mêmes périodes.

4. Soit $\wp(z)$ la fonction de Weierstrass définie par la somme

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \left(\frac{1}{(z + m\omega_1 + n\omega_2)^2} - \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2} \right)$$

pour $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{C},\ \omega_1/\omega_2 \notin \mathbf{R}$.
(i) Montrer que $\wp(z) = \wp(z + m\omega_1 + n\omega_2)$ pour tout $m, n \in \mathbf{Z}$ et que $\wp(z) = \wp(-z)$; c'est à dire $\wp(z)$ est doublement périodique et paire.
On considère son développement en série de Laurent autour du point $z = 0$:

$$\wp(z) = \frac{c_{-n}}{z^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 w + \cdots \quad (c_{-n} \neq 0)$$

(ii) Montrer que

$$\frac{1}{(z+\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2} \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \left(-\frac{z}{\omega}\right)^k$$

(iii) En déduire que

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$$

où

$$c_{2\ell+1} = 0, \qquad \text{et} \qquad c_{2\ell} = (2\ell+1) \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^{2(\ell+1)}}$$

On définit g_2 et g_2 de telle façon que

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20} z^2 + \frac{g_3}{28} z^4 + \mathcal{O}(z^6)$$

(iv) Montrer que

$$\begin{aligned} g_2 &= 60 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m\omega_1+n\omega_2)^4} \\ g_3 &= 140 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m\omega_1+n\omega_2)^6} \end{aligned}$$

(v) Montrer que

$$\wp'(z) = -2\sum_{m,n} \frac{1}{(z+m\omega_1+n\omega_2)^3}\,;$$

en déduire que $\wp'(z)$ est une fonction impaire.

(vi) Montrer que

$$\begin{aligned} \wp(z) &= \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20}z^2 + \frac{g_3}{28}z^4 + \mathcal{O}(z^6) \\ \wp'(z) &= -\frac{1}{z^3} + \frac{g_2}{10}z + \frac{g_3}{7}z^3 + \mathcal{O}(z^5) \\ \wp^3(z) &= \frac{1}{z^6} + \frac{3g_2}{20}\frac{1}{z^2} + \frac{3g_3}{28} + \mathcal{O}(z^2) \\ \wp'(z)^2 &= \frac{4}{z^6} - \frac{2g_2}{5}\frac{1}{z^2} - \frac{4g_3}{7} + \mathcal{O}(z^2) \end{aligned}$$

(vii) Montrer que

$$\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + g_2\wp(z) + g_3 = \mathcal{O}(z^2)\,,$$

et en déduire que

$$\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + g_2\wp(z) + g_3 = 0\,.$$

(penser au théorème de Liouville).

5. Montrer que

$$\wp(z;g_2,g_3) = \mu^2\wp\left(\mu z;\frac{g_2}{\mu^4},\frac{g_3}{\mu^6}\right)$$

et en particulier que

$$\wp(z;g_2,g_3) = -\wp(\mathrm{i}z;g_2,-g_3)\,.$$