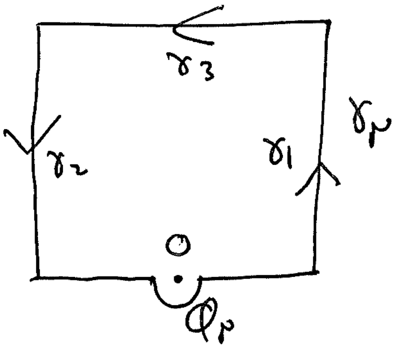
Feuille 5,5 Q. 2 : (6) Correction.

Soit $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$



alors f présente un pôle simple en $z=0$ avec résidu 1 : $\left(f(z) = \frac{1}{z}(1+iz+\cdots)\right)$

$C_\rho(t) = \rho e^{it} \quad (\pi \leq t \leq 2\pi)$

et $\displaystyle\int_{C_\rho} f(z)dz \to \pi i$ lorsque $\rho \to 0$

(1ère partie)

Théorème des résidus : $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \times 1 = 2\pi i$

$\gamma_1 : R+it, \ 0 \leq t \leq R$

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_0^R \frac{e^{i(R+it)}}{R+it}\, i\,dt$$

$$\left|\int_{\gamma_1} f(z)dz\right| = \left|\int_0^R \frac{e^{i(R+it)}}{R+it}dt\right| \leq \int_0^R \frac{e^{-t}}{|R+it|}dt$$

$$= \int_0^R \frac{e^{-t}dt}{\sqrt{R^2+t^2}} \leq \int_0^R \frac{e^{-t}}{R}dt = \left.-\frac{e^{-t}}{R}\right]_0^R = \frac{1}{R}(-e^{-R}+1)$$

$\to 0$ lorsque $R \to \infty$

De même $\displaystyle\int_{\gamma_2} f(z)dz \to 0$ lorsque $R \to \infty$

On voit aussi que $\displaystyle\int_{\gamma_3} f(z)dz \to 0$ lorsque $R \to \infty$

D'où $\displaystyle 2\pi i = \int_{-\infty}^{-\rho} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{C_\rho} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_\rho^\infty \frac{e^{ix}}{x}dx$

$$\Rightarrow \pi i = \lim_{\rho \to 0} \int_{-\infty}^{-\rho} \frac{\cos x + i\sin x}{x}dx + \lim_{\rho\to 0} \int_\rho^\infty \frac{\cos x + i \sin x}{x}dx = i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x}dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \pi$$