M1 Variable complexe – Feuille de TD 4,5 – Paul Baird

Principe du maximum

1. On suppose $f : U \to \mathbf{C}$ holomorphe (U ouvert dans $\mathbf{C}$). Soit $A \subset U$ un fermé borné. Montrer que $\sup\{|f(z)| : z \in A\}$ est atteinte sur la frontière de A.

2. (Lemme de Schwarz) Soit $D = D(0,1)$ le disque (ouvert) unité. On suppose que $f : D \to D$ holomorphe et que $f(0) = 0$.

(a) Montrer qu'il existe une fonction holomorphe g sur D telle que $f(z) = zg(z)$.

(b) Soit $r \in (0,1)$. Montrer que $1 \geq r \sup\{|g(z)| : |z| \leq r\}$ et en déduire que $|g(z)| \leq 1$ pour tout $z \in D$.

(c) Montrer que

soit (i) $f(z) = cz$ $(z \in D)$ pour une constante c avec $|c| = 1$,

soit (ii) $|f(z) < |z|$ pour tout z avec $0 < |z| < 1$.

(appliquer le principe du maximum et la question 1).

(d) En déduire que si $f : D \to D$ est holomorphe avec une inverse holomorphe et $f(0) = 0$, alors $f(z) = cz$ $(z \in D)$ pour une constante vérifiant $|c| = 1$.

3. Pour $a \in D$, soit g_a l'application

$$g_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \quad \left(|z| < \frac{1}{|a|}\right).$$

(a) Montrer que pour $|z| = 1$ on a $|g_a(z)| = 1$ et en déduire que $g_a : D \to D$.

(b) Montrer que $g_a : D \to D$ est holomorphe avec inverse holomorphe donnée par g_{-a}.

(c) En déduire que chaque application holomorphe bijective de D dans D est de la forme cg_a, où $a \in D$ et $|c| = 1$.

Indication : Soit f une telle application et soit a le point unique dans D tel que $f(a) = 0$. Considérer ensuite l'application $f \circ g_{-a}$.