M1 Variable complexe – Feuille de TD 5,5 – Paul Baird

Calcul des intégrales réelles.

1. (a) Montrer le lemme de Jordan : Soit $f(z)$ holomorphe dans $\mathbf{C}$ sauf en un nombre fini de points aucun sur la droite réelle. On note l'ensemble de ces points dans le demi-plan $\{z : \mathrm{Im} \ > 0\}$ par $c_1, \ldots, c_n$. Supposons que $f(z) \to 0$ lorsque $z \to \infty$ avec $\mathrm{Im}\, z \geq 0$ et soit a un nombre postif réel. Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \ x \,\mathrm{d}x + \mathrm{i} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin ax \,\mathrm{d}x = 2\pi \mathrm{i} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{res}\,(g, c_j)$$

où $g(z) = f(z) e^{\mathrm{i}az}$.

<u>Indication</u> : Donné $\epsilon > 0$, soit R tel que (i) $|c_j| < R$ pour chaque j, (ii) $|f(z)| \leq \epsilon$ lorsque $\mathrm{Im}\, z > 0$ et $|z| > R$, et (iii) $te^{-at} \leq 1$ lorsque $t \geq R$. Ensuite choisir $u, v > R$ et écrire $w = u + v$. Enfin, soit γ le rectangle avec sommets $-u$, v, $v + \mathrm{i}w$, $-u + \mathrm{i}w$ parcouru dans le sens direct. On calcule $\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z$.

(b) Appliquer le lemme de Jordan afin de calculer

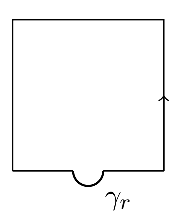
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} \mathrm{d}x$$

où $a > 0$.

2. (a) On suppose que f présente un pôle simple en a avec résidu ρ. Soit $\gamma_r(t) = a + re^{\mathrm{i}t}$ $(\alpha \leq t \leq \beta)$. Montrer que

$$\int_{\gamma_r} f(z) \mathrm{d}z \to \mathrm{i}\rho(\beta - \alpha) \quad \text{lorsque} \quad r \to 0.$$

(b) En prennant le chemin indiqué, calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$.



3. En considérant l'intégrale

$$\int_{C(0,1)} \frac{1}{\mathrm{i}z \left(a + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)} \mathrm{d}z$$

calculer

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos t} \mathrm{d}t$$

pour $a > 1$.

4. On pose $f(z) = e^{\mathrm{i}\pi z^2}$ et $g(z) = f(z)/\sin \pi z$. En considérant l'intégrale $\int_\gamma g(z)\mathrm{d}z$, où γ est le parallèlogramme avec sommets $\pm Rc \pm \frac{1}{2}$ où $R > 0$ et $c = e^{\mathrm{i}\pi/4}$, montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}\mathrm{d} = 1.$$

En déduire l'intégrale de probabilité $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.