Analyse dans $\mathbf{R}^n$

Cours No. 1, Topologie de $\mathbf{R}^n$

1. Norme

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Une *norme* sur E est une fonction numérique N sur E vérifiant

(i) $N(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$.
(ii) $N(x) = 0$ équivaut à $x = 0$.
(iii) Pour tout $x \in E$ et pour tout scalaire λ, on a $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.
(iv) pour tous $x, y \in E$, on a $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (l'inégalité triangulaire).

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur le choix de norme, on désigne la norme de x par $||x||$. On écrit souvent *e.v.n.* pour *espace vectoriel normé.*

Exemples Soit $E = \mathbf{R}^n$ avec coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
(i) La norme euclidienne : $||x||_2 = \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2}$.
(ii) La norme 1 : $||x||_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots |x_n|$.
(iii) La norme p (p un entier positif) : $||x||_p = (x_1{}^p + x_2{}^p + \cdots + x_n{}^p)^{1/p}$.
(iv) La norme infini, ou norme sup : $||x||_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$.
(v) Soit $I = [a, b]$ un intervalle borné dans $\mathbf{R}$ et soit $E := \mathcal{C}_{\mathbf{R}}(I)$ l'ensemble des fonctions continues numériques dans I. Alors E est un espace vectoriel ($f + g$ et λf etant les fonctions $t \to f(t) + g(t)$ et $t \to \lambda f(t)$ resp.). Alors

$$||f||_1 = \int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t$$

est une norme sur E. L'espace E muni de cette norme n'est pas complet. Un e.v.n. complet s'appelle un *espace de Banach.* Les exemples (i) – (iv) sont des espaces de Banach.

Si $(E, || \cdot ||)$ est un e.v.n., on obtient une *distance* sur E en posant $d(x, y) = ||x - y||$. On voit que $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ et que $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$.

Plus généralement, soit A un ensemble quelconque. Une *distance* sur A est une application $d : A \times A \to \mathbf{R}$ telle que
(i) $d(x, y) \geq 0$ pour tous $x, y \in A$.
(ii) $d(x, y) = 0$ équivaut à $x = y$.Mm
(iii) $d(y, x) = d(x, y)$ pour tous $x, y \in A$.
(iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pour tous $x, y, z \in A$ (l'inégalité triangulaire).

Un espace muni d'une distance s'appelle un *espace métrique*.

Equivalence des normes. Deux normes N_1 et N_2 sur un même espace vectoriel E sont *équivalentes* s'il existe deux nombres $\alpha, \beta > 0$ vérifiant $N_1(x) \leq \alpha N_2(x)$ et $N_2(x) \leq \beta N_1(x)$ pour tout $x \in E$; autrement dit, il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que :

$$\frac{1}{\alpha} N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$$

pour tout $x \in E$.

Exercice : Dans $\mathbf{R}^n$, on a

$$||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq \sqrt{n}||x||_\infty$$

et par suite les normes $|| \cdot ||_\infty$ et $|| \cdot ||_2$ sont équivalentes.

Dans un espace vectoriel E de dimension finie, toute norme est équivalente à toute autre norme. On verra pouquoi c'est le cas dans la suite.

Exemple: Soit $M^{k\times\ell}$ l'espace de $k \times \ell -$ matrices à coefficients réelles. On peut identifier $M^{m\times n}$ avec $\mathbf{R}^{mn}$ de la manière evidente : on écrit les lignes l'une après l'autre. On peut alors définir sur $M^{k\times\ell}$, les exemples de normes ci-dessus définies sur $\mathbf{R}^n$. Il y a d'autres normes interessantes définies sur $M^{k\times\ell}$, par exemple, la norme de Frobenius :

$$||A||_* := \sqrt{\text{trace}\,(A^* A)}$$

où A^* est la transposée de A, ou la norme obtenue en considérant l'application linéaire $A : \mathbf{R}^\ell \to \mathbf{R}^k$ associée :

$$||A|| := \sup_{x\neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}$$

où $|| \cdot ||$ est une norme quelconque sur $\mathbf{R}^\ell$ et $\mathbf{R}^k$.

Exercice : Montrer qu'il s'agit bien des normes.

Liées aux normes, il y a des inégalités fondamentales d'analyse. L'une est l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

Proposition 1.1. *Soient $x, y \in \mathbf{R}^n$; alors*

$$|x \cdot y| \leq ||x||_2||y||_2\,,$$

avec égalité si et seulement si x et y sont proportionnelle (eventuellement nulles).

Proof. On écrit $||\cdot||$ pour $||\cdot||_2$. Si $y=0$ le résultat est claire, et donc supposons que $y\neq 0$. Pour $t\in\mathbf{R}$, soit $\varphi(x+ty)=||x+ty||^2$. Alors

$$\varphi(x+ty)=||x||^2+2tx\cdot y+t^2||y||^2\geq 0$$

Il s'agit d'une quadratique en t ayant au plus une racine et donc le discriminant $\Delta\leq 0$. Mais $\Delta=4(x\cdot y)^2-4||x||^2||y||^2$. L'inégalité s'ensuit. De plus, on a égalité si et seulement si $x=-ty$. On raisonne de la même façon si $x\neq 0$. $\square$

<u>Exercice</u> : Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour montrer que pour tout ensemble de nombres complexes $\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$ on a

$$\left|\sum_{j=1}^{k}a_j\right|^2\leq k\sum_{j=1}^{k}|a_j|^2$$

avec égalité si et seulement si $a_1=a_2=\cdots=a_k$.

2. Ouverts dans $\mathbf{R}^n$

Dans la suite, on va utiliser la norme euclidienne $||x||=||x||_2$, mais tout s'adapte à n'importe quelle norme.

Soit $a\in\mathbf{R}^n$ et $r>0$. On définit la *boule ouverte* (euclidienne) de centre a et de rayon r, par

$$B(a,r)=\{x\in\mathbf{R}^n:||x-a||<r\}$$

La boule fermée de centre a et de rayon r, est définie par $\overline{B}(a,r):=\{x\in\mathbf{R}^n:||x-a||\leq r\}$, et la sphère de centre a et de rayon r, par $S(a,r):=\{x\in\mathbf{R}^n:||x-a||=r\}$. On remarque que $\overline{B}(a,r)=B(a,r)\cup S(a,r)$.

<u>Définition</u> : Une partie U de $\mathbf{R}^n$ est ouverte si, pour tout $x\in U$, il existe une boule de centre x contenue dans U. Une partie A de $\mathbf{R}^n$ est fermée si son complémentaire $\mathbf{R}^n\setminus A$ est un ensemble ouvert.

<u>Exercice</u> : Montrer qu'une boule ouverte (fermée) est bien une partie ouverte (fermée).

Parfois on parle simplement d'un ouvert, plutot qu'un ensemble ouvert, ou d'une partie ouverte.

Proposition 2.1. (i) *Les ensembles $\mathbf{R}^n$ et l'ensemble vide $\emptyset$ sont ouverts (et fermés).*
(ii) *La réunion d'une famille quelconque d'ouverts est ouvert.*
(iii) *L'interesection d'un nombre fini d'ouverts et ouvert.*
(iv) *L'intersection d'une famille quelconque d'ensembles fermés est fermé.*
(v) *Le réunion d'un nombre fini d'ensembles fermés est fermé.*

On laisse la preuve de cette proposition comme une exercice.

Exercice : L'hypothèse “fini” dans (iii) et (v) ci-dessus est essentielle. Soit I_n l'intervalle ouvert $]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}[$. Montrer que l'intersection infinie $\cap_n I_n = I_1 \cap I_2 \cap \cdots$ est fermé. Soit J_n l'intervalle fermé $J_n = [-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$. Montrer que la réunion infinie $\cup_n J_n$ est ouvert.

Voisinage : Une partie V de $\mathbf{R}^n$ est un voisinage d'un point x si V contient un ensemble ouvert contenant x. On remarque qu'un voisinage peut être ouvert, fermé, ou ni l'un ni l'autre. Pour qu'un ensemble soit ouvert, il faut et il suffit qu'il soit un voisinage de chacun de ses points.

Point intérieur : Soit A une partie de $\mathbf{R}^n$. On dit que le point x est *intérieur* à A si A est un voisinage de x. L'intérieur de A, noté $\mathring{A}$, est l'ensemble des points intérieur à A. L'intérieur d'un ensemble A est un ouvert, et c'est le plus grand ouvert contenu dans A. Un point y est *extérieur* à A s'il est intérieur à son complémentaire.

Exercice : Pour deux parties A et B, montrer que l'intérieur de $A \cap B$ est égale à $\mathring{A} \cap \mathring{B}$.

Point d'adhérence Soit A une partie de $\mathbf{R}^n$. Un point a est *adhérent* à A si chaque voisinage de a rencontre A. L'ensemble des points adhérents à A est appelé *adhérence* (ou *fermature*) de A et noté $\overline{A}$. L'adhérence $\overline{A}$ est un ensemble fermé, et c'est le plus petit ensemble fermé contenant A

Exercice : Montrer l'affirmation ci-dessus.

Exemple : L'adhérence de la boule ouverte $B(a,r)$ est la boule fermée $\overline{B}(a,r)$.

Frontière : On dit que le point x est un *point frontière* de l'ensemble A si chaque voisinage rencontre à la fois A et son complementaire. La *frontière* de A est l'ensemble de ses points frontières, qu'on note $\mathrm{fr}(A)$ ou ∂A. On remarque que par la définition, $\partial A = \overline{A} \cap \overline{\mathbf{R}^n \setminus A}$.

Exemple : 1. $\partial B(a,r) = \partial \overline{B}(a,r) = S(a,r)$.
2. Si A est une partie bornée de $\mathbf{R}$, la borne supérieure et a borne inférieure de A sont des points-frontière de A. Ces points appartiennent donc à $\overline{A}$.

Exercice : (i) Montrer que $\partial(\overline{A}) \subset \partial A$ et que $\partial(\mathring{A}) \subset \partial A$, et donner des exemples de la droite réelle pour lesquels ces trois ensembles sont distincts.
(ii) Montrer que $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$ et donner un exemple de la droite réelle pour lequel ces ensembles sont distincts. Si $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, montrer que $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$.

Ensemble dense : Soient A et B deux parties de $\mathbf{R}^n$ telles que $A \subset B$. On dit que A est *dense* dans V si $B \subset \overline{A}$; on dit que A est partout dense si $\overline{A} = \mathbf{R}^n$.

Exemple : Les rationnels $\mathbf{Q}$ sont partout dense dans $\mathbf{R}$, plus généralement l'ensemble des points dont les coordonnées sont rationnelles est partout dense dans $\mathbf{R}^n$.

Points isolés, points d'accumulation : Soit A une partie de $\mathbf{R}^n$. On dit qu'un point $a \in A$ est un *point isolé* de A s'il existe un voisinage V de a tel que $A \cap V = \{a\}$. On dit qu'un point $a \in \mathbf{R}^n$ est un *point d'accumulation de* A si chaque voisinage de a contient au moins un point de A distinct de a.
Il est évident que les points d'accumulation de A appartiennent à $\overline{A}$.

Exemple 1. Soit $A = \{1/n : n \in \mathbf{N}^*\}$. Chaque point de A est isolé et l'origine est un point d'accumulation de A.
2. Tout point de $\mathbf{R}$ est un point d'accumulation de l'ensemble $\mathbf{Q}$.

Définition : Un espace métrique E est dit *séparé* s'il contient un ensemble dénombrable dense.

3. Limites de suites

On dit qu'une suite (x_i) de points de $\mathbf{R}^n$ *converge* (ou tend) vers un point a si, à chaque voisinage V de a, on peut associer un entier m_V tel que $x_i \in V$ pour tout $i > m_V$; et on dit alors que a est une limite de la suite (x_i).

On dit que la suite (x_i) admet le point $a \in \mathbf{R}^n$ pour *valeur d'adhérence* si, pour tout voisinage V de a, l'ensemble $\{i \in \mathbf{N} : x_i \in V\}$ est infini.

Exemple : Dans $\mathbf{R}$, le point 1 est une valeur d'adhérence de la suite $((-1)^n)$. Ce qui est moins évident c'est qu'il est aussi une valeur d'adhérence de la suite $(\cos n)$.

Exercice : Dans $\mathbf{R}^n$ montrer qu'une suite a au plus une limite. Montrer qu'une suite convergente a une seule valeur d'adhérence qui est sa limite.

Exercice : Montrer que les valeurs d'adhérence d'une suite (x_i) de points d'un ensemble A appartiennent à l'adhérence de A. En déduire que la limite des suites convergentes de points de A appartiennent à $\overline{A}$.

Théorème : Pour qu'une partie A de $\mathbf{R}^n$ soit fermée, il faut et il suffit que les limites de suites convergentes de points de A appartiennent à A.

Preuve L'exercice ci-dessus montre que cette condition est nécessaire.

Soit $a \in \overline{A}$; par définition d'adhérence, chaque boule $B(a, 1/i)$, où $i \in \mathbf{N}^*$, contient au moins un point de A, que nous désignerons par x_i (et qui peut être a lui-même). La suite (x_i) est une suite de points de A convergente vers a. Si A vérifie la condition énoncé, on a donc $a \in A$, ce qui prouve que A est fermé. $\square$

Sous-suites convergentes : On considère la droite numérique achevée $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Théorème. Pour qu'un élément $x \in \overline{\mathbf{R}}$ soit une valuer d'adhérence de la suite (x_i), il faut et il suffit qu'il existe une suite (y_i), extraite de (x_i), qui converge vers x dans $\overline{\mathbf{R}}$.

Preuve : *La condition est suffisante* : Supposons qu'il existe une suite $(y_i) = (x_{q_i})$, extraite de la suite (x_i) qui converge vers $x \in \overline{\mathbf{R}}$. Si $x = +\infty$, la suite est non-majorée et admet donc x pour valeur d'adhérence (quel que soit $R > 0$, il y a une infinité de termes qui sont minorés par R). De même si $x = -\infty$.
Si x est fini, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe i_ε tel que $i > i_\varepsilon \Rightarrow ||y_i - x|| < \varepsilon \Rightarrow ||x_{q_i} - x|| < \varepsilon$; il s'ensuit que x est une valeur d'adhérence de la suite (x_i).
La condition est nécessaire : Soit x une valeur d'adhérence de la suite (x_i). Si $x = +\infty$, la suite est non-majorée et nous pouvons, par récurrence, construire une suite d'entiers q_i strictement croissante, satisfaisant à $x_{q_i} > i$ pour tout $i \in \mathbf{N}$. La suite $(y_i = x_{q_i})$, extraite de (x_i) converge alors vers $+\infty$. De même pour $-\infty$.
Si x est fini, on fait pareil, mais en remplaçant $x_{q_i} > i$ par $||x_{q_i} - x|| < 1/i$ pour tout $i \in \mathbf{N}^*$. $\square$

Théorème (Bolzano-Weierstrass). De toute suite bornée de nombres réels, on peut extraire une suite convergente.

Preuve : Soit (x_n) une suite dans l'intervalle $[a, b]$. A chaque intervalle fermé $[u, v]$, associons les deux intervalles moités :

$$[u, (u+v)/2] \quad \text{et} \quad [(u+v)/2, v]$$

Par recurrence on définit une suite $I_n = [a_n, b_n]$ d'intervalles fermés de $\mathbf{R}$ telle que :

- $I_0 = [a, b]$.
- $\forall n \in \mathbf{N}$, I_{n+1} est l'une des moitiés de I_n.
- $\forall n \in \mathbf{N}$, I_n contient une infinités de termes de la suite (x_n).

Les intervalles I_n forment une suites d'intervalles emboîtés dont la longueur $b_n - a_n = 2^{-n}(b-a)$ tend vers zéro. On en déduite que les I_n ont un seul point commun c, qui est la limite commune de (a_n) et (b_n). $\square$

Exemple : La suite $(\cos n)$ est bornée. On peut alors extraire une suite onvergente.

Suites de Cauchy.

Définition : Une suite (x_i) dans $\mathbf{R}^n$ est *de Cauchy* si $\forall\,\varepsilon 0\,\exists m_\varepsilon\; t.q.\, i,j > m_\varepsilon \Rightarrow ||x_i - x_j|| < \varepsilon$.

Exercices importants : 1. Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.
2. Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.

Un espace métrique est dit *complet* si toute suite de Cauchy y est convegente.

4. Fonctions continues

Soit f une application d'une partie A de $\mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{R}^n$: $f : A \to \mathbf{R}^n$. On dit que $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers $a \in A$ si, quel que soit le voisinage V de b dans $\mathbf{R}^n$, il existe un voisinage U de a dans $\mathbf{R}^m$ tel que, pour tout $x \in U \cap A$, on ait $f(x) \in V$.

On dit que f est continue en $a \in A$ si $f(x)$ tend vers $f(a)$ quand x tend vers a $(x \in A)$. Autrement dit, quel que soit le voisinage V de $f(a)$, il existe un voisinage U de a tel que $f(U \cap A) \subset V$.

Une autre façon de définir la continuité de f en a est comme suite : f est continue en a, si, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $t.q.\; ||x - a|| < \delta\, (x \in A) \;\Rightarrow\; ||f(x) - f(a)|| < \varepsilon$.

Exercice : 1. Montrer l'équivalence entre ces définitions.
2. Soit a un point d'adhérence d'un ensemble B avec $\overline{B} \subset A$. Si f est continue en a, montrer que $f(a)$ est un point d'adhérence de $f(B)$.

Si f est continue en tout point $a \in A$, on dit que f est continue sur A.

Ouvert relatif à A : Soit $A \subset \mathbf{R}^n$. On dit qu'un sous-ensemble $B \subset A$ est *ouvert (fermé) relatif à* A si $B = S \cap A$ avec S ouvert (fermé) dans $\mathbf{R}^n$.

Proposition : Soit $A \subset \mathbf{R}^m$ et soit $f : A \to \mathbf{R}^n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) f est continue sur A ;

(b) quel que soit l'ouvert $V \subset \mathbf{R}^n$, l'image reciproque $f^{-1}(V \cap f(A))$ est ouvert relatif à A.

Exercice : On suppose $A \subset \mathbf{R}^m$ ouvert, $B \subset \mathbf{R}^n$ ouvert et $f : A \to \mathbf{R}^n$, $g : B \to \mathbf{R}^p$ deux applications telles que $f(A) \subset B$. On définit l'application composée $g \circ f$ par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Montrer que si f et g sont continues, il en est de même pour $g \circ f$.

Applications uniformément continues Soit A une partie de $\mathbf{R}^m$. Une application $f : A \to \mathbf{R}^n$ est dite uniformémement continue sur A si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il exite un nombre $\delta > 0$ tel que, pour tout $x, y \in A$ vérifiant $||x - y|| < \delta$, on ait $||f(x) - f(y)|| < \varepsilon$.

Bien evidemment, une application uniformément continue sur A est continue sur A.

Théorème. On suppose A une partie de $\mathbf{R}^m$ et D une partie dense de A ($\overline{D} = A$). Soit $f : D \to \mathbf{R}^n$ une application uniformément continue. Il existe alors une application $\widetilde{f} : A \to \mathbf{R}^n$ unique prolongeant f, et cette application est uniformément continue sur A.

Preuve. Si $\widetilde{f}$ existe on doit avoir

$$\widetilde{f}(a) = \lim_{x \to a} f(x) \tag{1}$$

en tout point a de $\overline{D} = A$, ce qui prouve l'unicité de $\widetilde{f}$. On montre que $\widetilde{f}$ existe.
Comme conséquence des définitions, l'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue est une suite de Cauchy. Or, si (x_i) est une suite de points de D convergeant vers $a \in A$, c'est une suite de Cauchy, donc $f(x_i)$ est une suite de Cauchy dans $\mathbf{R}^n$, et puisque $\mathbf{R}^n$ est complet, $f(x_i)$ a une limite ; nous désignerons cette limite par $\widetilde{f}(a)$.
Pour montrer que $\widetilde{f}$ est continue, donnons-nous $\varepsilon > 0$ arbitraire et choisissons $\delta > 0$ tel que les relations $x, y \in D$ et $||x - y|| < \delta$ entraînent $||f(x) - f(y)|| < \varepsilon$. Si a, b sont deux points de A vérifiant l'inégalité stricte $||a - b|| < \delta$, et si $(x_i), (y_j)$ sont deux suites de points de D convergeant respectivement vers a, b on a, pour i assez grand : $||x_i - y_i|| < \delta$ (il suffit de choisir i assez grand pour avoir à la fois $||a - x_i|| < \rho$ et $||b - y_i|| < \rho$ avec $\rho = \frac{1}{2}(\delta - ||a - b||)$). Pour i assez grand, on a donc $||f(x_i) - f(y_i)|| < \varepsilon$, d'où, par passage à la limite : $||\widetilde{f}(a) - \widetilde{f}(b)|| \leq \varepsilon$. Cela montre que $\widetilde{f}$ est continue (même uniformément continue) sur A. Enfin, d'après (1), $\widetilde{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in D$. $\square$

Exemple : On montre facilement que la fonction $x \to \ln a^x$ $(a > 0)$ est donnée par $x \to x \ln a$ pour x rationnel. Puisque cette fonction est uniformément continue sur tout intervalle fermé $[c, d]$, par le théorème ci-dessus, elle se prolonge par la même expression en x réel.

Application lipschitzienne : On dit que l'application $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ est lipschitzienne par rapport à $k > 0$ si quels que soient $x, y \in \mathbf{R}^m$, on a

$$||f(x) - f(y)|| \leq k||x - y||$$

Exercice 1. Montrer qu'une application lipschitzienne est uniformémement continue.
2. Montrer que l'application $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2}, z)$ est lipschitzienne avec constant $k = 1$.

Suites d'applications. Soit A une partie de $\mathbf{R}^m$, et soit (f_i) une suite d'applications $f_i : A \to \mathbf{R}^n$. Pour $x \in A$, on peut poser la question de si la suite $(f_i(x))$ converge ou non. Si elle converge pour tout $x \in A$, on peut alors définir l'application limite $f : A \to \mathbf{R}^n$ par $f(x) = \lim_{i\to\infty} f_i(x)$. Dans ce cas, on dit que la suite (f_i) *converge simplement* vers f.

Pourtant, même si chaque f_i est continue, la convergence simple vers f n'entraîne pas en général la continuité de f. On peut citer la suite $f_i(x) = x^{2i}$ définie sur l'intervalle $[-1, 1]$ comme exemple : pour $|x| < 1$, $f_i(x) \to 0$ lorsque $i \to \infty$ mais pour $x = \pm 1$, $f_i(x) \to 1$.

Convergence uniforme. On dit que la suite (f_i) converge uniformément vers f sur A si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier N, ne dépendant que de ε, tel que pour tout $i \geq N$ et tout $x \in A$, on ait $||f_i(x) - f(x)|| < \varepsilon$.

Théorème. Si une suite d'applications $f_i : A \to \mathbf{R}^n$ converge uniformément vers f et chaque f_i est continue, alors il en est de même pour la fonction limite f.

Preuve : Soit $x \in A$. Donné $\varepsilon > 0$, il suffit d'écrire $||f(x) - f(y)||$ comme :

$$\begin{aligned} ||f(x) - f(y)|| &= ||f(x) - f_i(x) + f_i(x) - f_i(y) + f_i(y) - f(y)|| \\ &\leq ||f(x) - f_i(x)|| + ||f_i(x) - f_i(y)|| + ||f_i(y) - f(y)|| \end{aligned}$$

En effet, il existe $\delta > 0$ et un entier N tels que pour $i \geq N$ et $||x - y|| < \delta$, on ait $||f(x) - f_i(x)|| < \varepsilon/3$ (convergence uniforme) ; $||f_i(x) - f_i(y)|| < \varepsilon/3$ (continuité de f_i) et $||f_i(y) - f(y)|| < \varepsilon/3$ (convergence uniforme). D'où $||x - y|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(y)|| < \varepsilon$.
$\square$

5. Ensembles compacts

Recouvrement : Soit A une partie de $\mathbf{R}^n$. On dit qu'une famille $\mathcal{R} = (X_i)_{i\in I}$ de parties de $\mathbf{R}^n$ recouvre A si leur réunion $\cup_{i\in I} X_i$ contient A. Ce recouvrement est dit fini si l'ensemble des indices I est fini.

Si J est une partie de I, telle que la sous-famille $\mathcal{S} = (X_i)_{i\in J}$ recouvre A, on dit que le recouvrement $\mathcal{S}$ est *extrait* de $\mathcal{R}$.

Enfin, on dit que le recouvrement $\mathcal{R}$ est *ouvert* si les ensembles X_i sont tous ouverts.

Définition. Une partie $A \subset \mathbf{R}^n$ est dit *compact* s'il vérifie la condition suivante (axiome de Borel-Lebesgue) :

De tout recouvrement ouvert de A, on peut extraire un recouvrement fini.

Image continue d'un compact.

Théorème. Si $f : A \to \mathbf{R}^n$ est une application continue d'une partie compacte $A \subset \mathbf{R}^m$, alors l'image $f(A)$ est compacte.

Preuve : Soit $(V_i)_{i\in I}$ un recouvrement de $f(A)$ par des ouverts de $\mathbf{R}^n$. Puisque f est continue, les ensembles $f^{-1}(V_i \cap f(A))$ sont ouverts relatifs à A dans $\mathbf{R}^m$ et donc $f^{-1}(V_i \cap f(A)) = U_i \cap A$ pour chaque i ; en plus ils recouvrent A. Il s'ensuit que $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de A. Du fait que A est compact, il existe une partie finie J de I telle que les ensembles $(f^{-1}(V_i \cap f(A)))_{i\in J}$ recouvrent A : alors la famille $(V_i)_{i\in J}$ constitue un recouvrement fini de $f(A)$ extrait du recouvrement donné. $\square$

Caractérisation d'un ensemble compact. On montre que les ensembles compacts de $\mathbf{R}^n$ sont les ensembles bornés et fermés.

Théorème (Bolzano-Weierstrass). Soit $A \subset \mathbf{R}^n$ compact ; alors toute suite de points de A admet au moins une valeur d'adhérence dans A. En plus la limite de toute suite convergente de A appartient à A.

Preuve : Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite (x_i) de points de A sans valeur d'adhérence dans A. Puisque la réunion d'une suite et ses valeurs d'adhérence est fermée, il s'ensuit que l'ensemble $X_0 = \{x_i\}_{i\in\mathbf{N}} \cup T$, où T est l'ensemble des valeurs d'adhérence (dans $\mathbf{R}^n$), est fermé (dans $\mathbf{R}^n$). Il en est de même pour chacun des ensembles $X_p = \{x_i\}_{i\geq p} \cup T$. Or, l'intersection $A \cap (\cap_p X_p)$ est vide, car un point $a \in A$ commun à tous les X_p serait une valeur d'adhérence dans A de la suite (x_i). Il s'ensuite que la famille des complementaires $(U_p = \mathbf{R}^n \setminus X_p)$ est un recouvrement ouvert de A et par compacité on peut extraire un recouvrement fini.
D'autre part, si $I = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ est une partie finie de $\mathbf{N}$, l'intersection des ensembles de la famille $(X_i)_{i\in I}$ est l'ensemble X_p avec $p = \sup(p_1, p_2, \ldots, p_k)$; cette intersection contient des points de A, ce qui donne une contradiction.
La raisonnement ci-dessus montre egalement que la limite de toute suite convergente appartient à A. $\square$

Théorème. Pour que $A \subset \mathbf{R}^n$ soit compact, il faut et il suffit que de chaque suite de points de A, on peut extraire une suite convergente.

Preuve : On a vu que la condition est nécessaire dans le théorème ci-dessus. Le fait que la condition est suffisante est moins évident. On donne une indication en omettant les détails. On suppose alors qe la condition est vérifiée.

1. Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement de A par une famille finie de boules de rayon ε (on suppose au contraire, et on construit par récurrence une suite contenant aucune suite convergente).
2. On montre que si (U_i) est un recouvrement de A, il existe un nombre $r > 0$ tel que, pour tout $x \in A$, la boule $B(x, r)$ soit contenue dans l'un des ensembles U_i au moins : si un tel nombre r n'existerait pas, il existerait une suite (x_i) de points de A telle que la boule $B(x_i, 1/i)$ ne soit contenue dans aucun ensemble U_i. De la suite (x_i) on pourrait extraire une suite convergente, avec limite $a \in A$ disons. Mais l'un des U_i contient a, disons U_k. Puisque U_k est ouvert il contient une boule de centre a...
3. On suppose (U_i) un recouvrement de A, et on prend r comme ci-dessus. Alors il existe un recouvrement fini par des boules de rayon r. Plus précisamment, il existe une famille finie de boules $B(x_k, r)$ $(k = 1, \ldots, n)$ dont chacune est contenue dans un ensemble U_i au moins, ce qui donne le recouvrement fini recherché. $\square$

Les théorèmes ci-dessus montre qu'un compact A de $\mathbf{R}^n$ est toujours fermé. D'autre part, il est borné, sinon, on pourrait trouver une suite de points (x_i) de A avec $||x_i|| \geq i$ pour tout $i \in \mathbf{N}$, et une telle suite ne contient aucune sous-suite convergente, ce qui contredit encore une fois le théorème.

<u>Théorème</u>. Soit $K \subset \mathbf{R}^n$ compact et soit $A \subset K$ fermé ; alors A est compact.
<u>Preuve</u> : Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de A et soit $V = \mathbf{R}^n \setminus A$ (un ouvert). Alors $(U_i)_{i \in I} \cup V$ est un recouvrement ouvert de K et par la compacité de K on peut alors extraire un recouvrement fini $(U_i)_{i \in J} \cup V$. Il s'ensuit que $(U_i)_{i \in J}$ est un recouvrement fini de A extrait de $(U_i)_{i \in I}$ et A est compact. $\square$

<u>Théorème</u>. Pour qu'une partie de $\mathbf{R}^n$ soit compacte, il faut et il suffit qu'elle soit fermée et bornée.
<u>Preuve</u>. On doit montrer qu'un sous-ensemble $A \subset \mathbf{R}^n$ fermé et borné soit compact. Par le théorème de Bolzano Weierstrass, les intervalles fermés et bornés de $\mathbf{R}$ sont des compacts. Il est facile de démontrer que le produit de deux compacts est compact (exercice : on applique la critère ci-dessus - d'une suite $(z_i = (x_i, y_i)$ dans $A \times B$, on en obtient deux suites (x_i) et (y_i) dans A et B resp.). Puisque A est borné il est contenu dans un produit $[-a, a]^n$, qui est compact. Par le théorème précedant, un sous-ensemble fermé d'un compact est compact, d'où A est compact. $\square$

<u>Exercice</u> : Montrer que quel que soient les normes sur $\mathbf{R}^n$, elles sont toutes équivalentes. (Indication : on montre qu'une norme donnée N est équivalente à la norme euclidienne

$|| \cdot ||$; on considère la sphère euclidienne $S^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ - un compact ; puis, N est une fonction continue sur S^{n-1} ; ...)

Annexe : *Preuve simple et directe qu'un compact dans* $\mathbf{R}^n$ *est fermé et borné* : Soit $A \subset \mathbf{R}^n$ compact. On considère le recouvrement $\mathcal{U} = \{B(0,r) : r \in \mathbf{R}\}$. Puisque $\mathcal{U}$ recouvre $\mathbf{R}^n$, il recouvre A. On peut alors extraire un recouvrement fini $\{B(0,r_1),\dots,B(0,r_k)\}$. Soit $R = \max\{r_1,\dots,r_k\}$. Alors A est borné par R.
Soit $p \in \mathbf{R}^n \setminus A$ et considérons le recouvrement $\mathcal{V}$ d'ensembles
$V_r := \{x \in \mathbf{R}^n : ||x-p|| > r\}$ $(r \in \mathbf{R})$. Alors $\mathcal{V}$ recouvre A car il recouvre $\mathbf{R}^n \setminus \{p\}$. On peut alors extraire un recouvrement fini $U_{r_1},\dots,U_{r_k}$. Soit $m = \min\{r_1,\dots,r_k\}$. Alors $B(p,m/2)$ et un ouvert dans $\mathbf{R}^n \setminus A$ contenant p d'où p est extérieur à A. Puisque chaque point dans $\mathbf{R}^n \setminus A$ est extérieur, il s'ensuit que $\mathbf{R}^n \setminus A$ est ouvert et A est fermé.
$\square$

Références 1. J. Dieudonné, Foundations of Modern Analysis, Academic Press 1969.
2. J. Lelong-Ferrand et J. M. Arnaudiès, Cours de Mathématiques Tome 2 : Analyse, 4ème édition, Dunod Université 1977.