L2 Analyse dans $\mathbb{R}^n$. Devoir no. 1. Indication aux solutions

1 (a) $N(x) = \sup\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$

- $N(x) = 0 \iff |x_i| = 0 \ \forall i \iff x_i = 0 \ \forall i \iff x = (x_1, \dots, x_n) = 0$
- $N(\lambda x) = \sup\{|\lambda x_1|, \dots, |\lambda x_n|\} = \sup\{|\lambda||x_1|, \dots, |\lambda||x_n|\} = |\lambda| \sup\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = |\lambda| N(x)$
- $N(x+y) = \sup\{|x_1+y_1|, \dots, |x_n+y_n|\} \leq \sup\{|x_1|+|y_1|, \dots, |x_n|+|y_n|\} \leq \sup\{|x_1|, \dots, |x_n|\} + \sup\{|y_1|, \dots, |y_n|\}$
$= N(x) + N(y)$

(b) Soit $\|\cdot\|$ la norme euclidienne. D'un part

$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq \sqrt{N(x)^2 + \dots + N(x)^2} = \sqrt{n N(x)^2} = \sqrt{n}\, N(x)$

D'autre part $N(x) = \sup\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = \sqrt{\sup\{|x_1|, \dots, |x_n|\}^2} \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \|x\|$

Donc $N(x) \leq \|x\| \leq \sqrt{n}\, N(x)$
et les deux normes sont équivalentes.

(c) $f(t) = \|ta + b\|$ $(a \neq 0)$

On a toujours l'inégalité $\big| \|a\| - \|b\| \big| \leq \|a+b\|$

En effet, dans $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$, on prend $b = c - a$:
$\|c\| \leq \|a\| + \|a - c\| \Rightarrow \|c\| - \|a\| \leq \|a - c\|$
$\overset{c \to -c}{\Longrightarrow} \|c\| - \|a\| \leq \|a + c\|$
de même $\|a\| - \|c\| \leq \|a + c\| \Rightarrow \big| \|a\| - \|c\| \big| \leq \|a + c\|$
puis on remplace c par b.

Il s'ensuit que $\|ta\| - \|b\| \leq \|ta + b\|$
Mais $\|ta\| - \|b\| = |t|\,\|a\| - \|b\| \to \infty$ lorsque $t \to \pm\infty$ car $a \neq 0$

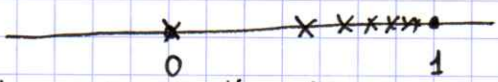
(d) Si l'on prend $t = 0$, $f(t) = \|b\|$, donc $m \leq \|b\|$.
Si $b = 0$, le minimum $f(t) = 0$ est clairement atteint en $t = 0$
Sinon, soit $R = \|b\|$, et considérons $A = \overline{B(0,R)} \cap \{ta + b \mid t \in \mathbb{R}\}$

D'abord, la droite $t \mapsto ta + b$ est fermé, car son complément est ouvert. Puisque l'intersection de deux fermés est fermé, A est fermé et étant borné A est compact. Puisque le minimum de f est $\leq R$, et f atteint son minimum sur A (A étant compact), f atteint sa borne inférieure.

(e) Soit $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Soit $f(t) = N(ta + b) = N\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \sup\{1, |t|\}$

On voit que le minimum de $f(t)$ est 1 et qu'il est atteint pour tout t avec $|t| \leq 1$ — une infinité de points.

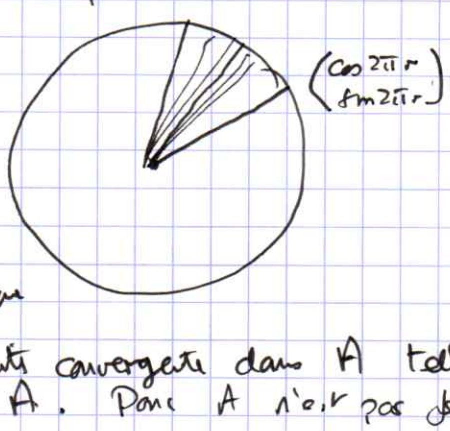
2. (a) $A = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{1\}$



A est fermé, compact. Les points ~~d~~ isolés sont tous les points $\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$

Les points d'adhérence sont tous les points de A.

(b) $A = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos 2\pi r \\ \sin 2\pi r \end{pmatrix} \right] \subset \mathbb{R}^2$



A est ni fermé ni ouvert

Par exemple, soit (r_i) une suite de nombres rationnels t.q. $r_i \to \sqrt{2}$ lorsque $i \to \infty$

Alors $(\cos 2\pi r_i, \sin 2\pi r_i)$ est une suite convergente dans A telle que sa limite $(\cos 2\pi\sqrt{2}, \sin 2\pi\sqrt{2}) \notin A$. Donc A n'est pas fermé

Il n'est pas ouvert non plus, car $(0,0) \in A$, mais toute boule $B(0, \varepsilon)$ contient le point $\begin{pmatrix} \frac{\varepsilon}{2} \cos 2\pi\sqrt{2} \\ \frac{\varepsilon}{2} \sin 2\pi\sqrt{2} \end{pmatrix} \notin A$.

A ne contient aucun point isolé.

Les points d'adhérence sont les points du disque fermé $\overline{B(0,1)}$.

3. Soit $f(x) = \|x\|$. On remarque que f est la composée de deux applications ~~g(x)~~ $f = \cancel{h \circ g}\ g_2 \circ g_1$ où $g_1(x) = \|x\|^2$ et $g_2(y) = \sqrt{y}$, avec $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$.

f est différentiable si g_1 et g_2 le sont.

Différentiabilité de g_1 : $\|x + h\|^2 = (x+h)\cdot(x+h) = \|x\|^2 + 2x\cdot h + \|h\|^2$

~~d'où $\|x + h\|^2 =$~~ Puisque $\|h\|^2$ est $o(h)$, on voit que

~~$Dg_1(x)(h) = 2x \cdot h$~~

g est différentiable ~~en~~ en tout $x \in \mathbb{R}^n$ avec $Dg_1(x)(h) = 2x \cdot h$.

Différentiabilité de g_2 : Il s'agit d'une fonction ~~d~~ réelle d'une variable réelle et il suffit de noter que $g_2'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ pour tout $y > 0$

Par la loi de la dérivée d'une ~~fonction~~ application composée, puisque $x \neq 0$

f est dérivable en $x \neq 0$ avec dérivée

$$Df(x)(h) = Dg_2(\|x\|^2) \circ Dg_1(x)(h) = Dg_2(\|x\|^2)(2x \cdot h)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\|x\|^2}} \cdot 2x \cdot h = \frac{x \cdot h}{\|x\|}$$

Si f était dérivable en $x = 0$, on aurait $\|h\| = Df(h) + o(h)$ c'est à dire $Df(h) = \|h\| + o(h)$, ce qui est impossible car la partie gauche est linéaire en h, et la partie droite non.

En effet $0 = Df(h + (-h)) = Df(h) + Df(-h) = \|h\| + o(h) + \|-h\| + o(-h)$
$= 2\|h\| + o(h)$ une contradiction

$\left(0 = \frac{1}{\|h\|} Df(h + (-h)) \right) = 2 + \frac{o(h)}{\|h\|} \to 2$ lorsque $h \to 0$, $h \neq 0$)