L2 Mathématiques PMRC, Analyse dans $\mathbf{R}^n$

Exercices d'entrainement

Aucun document n'est autorisé, usage de calculatrices interdit

Topologie, normes.

1. (a) Donner la définition d'équivalence des normes.

(b) Montrer que la fonction $N(x) = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$ est une norme sur $\mathbf{R}^n$.

(c) Soit $|| \cdot ||$ la norme euclidienne dans $\mathbf{R}^n$. Trouver le maximum et le minimum de $N(x)$ restreinte à la sphere unité $S^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n : ||x|| = 1\}$ (penser au théorème des extremas liés).

(d) En déduire que $N(x)$ est équivalente à la norme euclidienne.

2. (a) Définir la frontière ∂A d'un ensemble $A \subset \mathbf{R}^n$. Donner un exemple d'un ensemble A de frontière vide, et un exemple d'un ensemble A dont la frontière $\partial A = A$.

(b) Montrer que $\partial(\overline{A}) \subset \partial A$ et que $\partial(\mathring{A}) \subset \partial A$, et donner un exemple $A \subset \mathbf{R}$ de la droite réelle pour lequel ces trois ensembles sont distincts.

(c) Quelle est la frontière de l'ensemble $\{(x, \sin(1/x)) \in \mathbf{R}^2 : x > 0\}$?

(d) On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ des points $x_n = (\frac{1}{n}, \sin n) \in \mathbf{R}^2$. Trouver l'ensemble des valeurs d'adhérence de (x_n) (on admet que $\{\sin n : n \in \mathbf{N}^*\}$ est dense dans $[-1, 1]$).

3. (a) Donner la définition de compacité d'un sous-ensemble $A \subset \mathbf{R}^n$.

(b) Donner une caractérisation d'un compact en termes des notions : fermé et borné.

Soit $X = \overline{B(0,1)} = \{x \in \mathbf{R}^n : ||x|| \leq 1\}$ la boule unitée fermée dans $\mathbf{R}^n$ (où $||x||$ est la norme euclidiénne). Soit $k \in \mathbf{R}$ vérifiant $0 < k < 1$ et soit $\varphi : X \to X$ une application telle que

$$||\varphi(y) - \varphi(x)|| \leq k||y - x||$$

(d) Soit $x_0 \in X$ quelconque. On définit une suite (x_n) en posant $x_n = \varphi(x_{n-1})$. Montrer par récurrence que

$$||x_{n+1} - x_n|| \leq k^n ||x_1 - x_0|| \,.$$

En déduire que (x_n) est une suite de Cauchy, et que sa limite $x^* \in X$.

(e) Montrer que x^* est un point fixe pour φ : $\varphi(x^*) = x^*$, et que x^* est unique comme point fixe.

(f) Soit φ définie par $\varphi(x) = \frac{x-1}{2}$. Montrer que φ vérifie les hypothèses ci-dessus et trouve son point fixe.

4. (a) Donner l'énoncé du théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbf{R}^n$.

On suppose $A \subset \mathbf{R}^n$ un compact, et soit $||\cdot||$ la norme euclidienne. Soit $f : A \to A$ une application telle que $||f(y) - f(x)|| \geq ||y - x||$ pour tout $x, y \in A$. Le but de cette question est de montrer que $||f(y) - f(x)|| = ||y - x||$ pour tout $x, y \in A$ (une telle application s'appelle une *isométrie*).

Soit $a, b \in A$ quelconque. On pose $a_1 = f(a)$, $a_2 = f(a_1) = f(f(a))$, $\ldots$, $a_i = (\overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{i})(a), \ldots$. De même pour $b, b_1, b_2, \ldots$.

(b) Donné $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe une indice k telle que $||a - a_k|| < \varepsilon$ (on considère un point d'accumulation de la suite (a_i) et on remarque que $||a_{k_1+1} - a_{k_2+1}|| \geq ||a_{k_1} - a_{k_2}||$). En déduire que $f(A)$ est dense dans A.

(c) Donné $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe une indice commune k telle que $||a - a_k|| < \varepsilon$ et $||b - b_k|| < \varepsilon$ (on peut considérer un point d'accumulation de la suite (a_i, b_i) dans le compact $A \times A$). En déduire que $||f(a) - f(b)|| = ||a - b||$. Conclure.

5. (a) Donner la définition d'un ouvert dans $\mathbf{R}^n$.

On se rappelle, qu'un ensemble $S \subset A$ est ouvert relatif à un sous-ensemble $A \subset \mathbf{R}^n$ si $S = U \cap A$ pour un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$. Un ensemble $A \subset \mathbf{R}^n$ est dit *connexe* s'il n'existe pas de couple S, T de sous-ensembles non-vides de A, ouverts relatif à A, tels que $S \cup T = A$ et $S \cap T = \emptyset$.

(b) Est-ce-que les ensembles A_i suivants sont connexes ? Justifier

$$A_1 = \{(x, 0) : x \in \mathbf{R}\} \cup \{(0, y) : y \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^2$$

$$A_2 = \{(x, 0) : x \in \mathbf{R}\} \cup \{(0, y) : y \in \mathbf{R}\} \setminus \{(0, 0)\} \subset \mathbf{R}^2$$

$$A_3 = \{x \in \mathbf{R}^2 : ||x|| < 1\} \cup \{(0, 1)\}$$

(c) Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x + y > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x + y = 0 \\ -1 & \text{si} \quad x + y < 0 \end{cases}$$

Est-ce-que la restriction $f_1 = f|_{A_1}$ est continue ? Est-ce-que la restriction $f_2 = f|_{A_2}$ est continue ?

Applications différentiables (dans l'absence d'autre indicatif, on prend la norme euclidienne dans $\mathbf{R}^n$).

6. (a) Définir la *dérivée* d'une application $f : U \to \mathbf{R}^p$ en un point $a \in U$ (U ouvert dans $\mathbf{R}^n$), et expliquer comment elle est représentée en termes d'une matrice jacobienne.
(b) Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ une application linéaire. Exprîmer la dérivée de f en un point $a \in \mathbf{R}^n$ en termes de f.
(c) Soit $u \in \mathbf{R}^n$ un vecteur unitaire. Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ l'application $f(x) = x-(x \cdot u)u$. Trouver la dérivée de f en $a \in \mathbf{R}^n$.

7. (a) Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 0\,.$$

Soit (x_1,y_1), $(x_2,y_2) \in \mathbf{R}^2$ deux points. Montrer que la limite

$$g((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := \lim_{t\to 0,\, t\neq 0} \frac{f(x_1+tx_2, y_1+ty_2) - f(x_1,y_1)}{t}$$

existe, mais que l'application $(x_2,y_2) \to g((0,0),(x_2,y_2))$ n'est pas linéaire, et par suite f n'est pas dérivable au point $(0,0)$.
(b) Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^3y}{x^4+y^2} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 0\,.$$

Pour deux points (x_1,y_1), $(x_2,y_2) \in \mathbf{R}^2$, montrer que la limite $g((x_1,y_1),(x_2,y_2))$ de la partie (a) existe et que $(x_2,y_2) \to g((x_1,y_1),(x_2,y_2))$ est linéaire pour chaque $(x_1,y_1) \in \mathbf{R}^2$, mais que f n'est pas différentiable au point $(0,0)$ (on peut considérer les points (x,y) avec $y = x^2$).

8. (a) Soit $f : U \to V$ et $g : V \to \mathbf{R}^q$ deux applications (U ouvert dans $\mathbf{R}^n$, V ouvert dans $\mathbf{R}^p$) telles que $f(U) \subset V$. On suppose f différentiable en $a \in U$ et g différentiable en $b = f(a) \in V$. Exprîmer la dérivée de l'application composée $g \circ f$ en a en termes des dérivées de f en a et de g en b.
(b) Soit $f : U \to \mathbf{R}^p$ une application différentiable en un point $a \in U$ (U ouvert dans $\mathbf{R}^n$). Soit $A : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^p$ une application linéaire. Montrer que $D(Af)(a) = ADf(a)$. En déduire que si $n = p$ et $Df(a)$ est inversible, alors $D(Df(a)^{-1}f)(a) = I$ (l'identité).
(c) Appliquer la loi de la dérivée d'une fonction composée pour calculer la dérivée $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$ lorsque $f = x^2y$, $x = \sin t$ et $y = t^2+1$.
(d) On suppose $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ donnée par $g(u,v) = u^2v + u$ et $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ donnée par $f(x,y) = (x^3+y^3, 3x^2y+3xy^2)$. Soit $F = g \circ f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Calculer les dérivées partielles $\partial F/\partial x$ et $\partial F/\partial y$ en fonction de x et de y.

9. (a) On suppose $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^p$ munis des leures normes euclidiennes $||\cdot||$. Montrer que

$$||A||_M := \max_{||x||=1} ||Ax||$$

est une norme sur l'espace vectoriel $M_{n,p} := \{A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p : A \text{ lineaire}\}$.

(b) Soit $f : U \to \mathbf{R}$ une application C^1 (U ouvert dans $\mathbf{R}^n$). Montrer qu' en un point $x \in U$, on a

$$||Df(x)||_M = ||\mathrm{grad}\, f(x)||$$

(on peut considérer le problème de maximiser $||Df(h)||$ soumise à la contrainte $||h||^2 = 1$ et appliquer la méthode de extrema liés).

On se rappelle de la formule des accroissements finis pour une function réelle : soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ continue de classe C^1 sur $]a,b[$; alors il existe $c \in]a,b[$ vérifiant

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)\,.$$

(c) Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ ouvert et soit $f : U \to \mathbf{R}$ une fonction C^1. Soient $x, y \in U$ tel que le segment droit $[x,y] := \{(1-t)x + ty : 0 \le t \le 1\} \subset U$. En considérant la fonction composée $g(t) = f((1-t)x + ty)$, en déduire

$$|f(y) - f(x)| \le \max_{c \in [x,y]} ||Df(c)||_M \times ||y - x|| \tag{1}$$

(d) On pose $y = x + h$. Interpréter (1) dans la limite $h \to 0$.

(e) Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ donnée par $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Calculer $||\mathrm{grad}\, f(x)||$ en chaque point $x \in \mathbf{R}^2$. Si on pose $x = (x_1, x_2)$ et $y = 0$ dans (1), quelle est l'inégalité qui en résulte ?

10. (a) Pour quelles valeurs de $r = 1, 2, 3, \ldots$, la fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $f(x,y) = (xy^2)^{7/3}$ est-elle C^r ?

(b) Montrer que la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

est difféntiable en tout point de $\mathbf{R}$ mais que sa dérivée n'est pas continue (et donc elle n'est pas C^1).

<u>Dérivées supérieures, points extremeaux</u>

11. Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Montrer que f est de classe C^1 su $\mathbf{R}^2$.

(b) Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et diffèrent. Qu'en déduire.

12. Soit $f : U \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^2 définie sur un ouvert $U \subset \mathbf{R}^2$. On cherche une condition sur f qui garantit l'existence d'une fonction $g : U \to \mathbf{R}$ telle que $\operatorname{grad} f$ et $\operatorname{grad} g$ sont orthogonaux et de la même longueur en tout point de U.

(a) Montrer qu'en tout point de U, le vecteur $v = (-\partial f/\partial y, \partial f/\partial x)$ est orthogonal à $\operatorname{grad} f$ et de la même longueur.
(b) S'il existe une fonction $g : U \to \mathbf{R}$ telle que $v = \operatorname{grad} g$, appliquer le lemme de Schwarz pour montrer que nécessairement g vérifie l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$$

(c) En déduire que f elle-même doit aussi satisfaire l'équation de Laplace. (Si U est convexe, cette équation est nécessaire et suffisante pour que f détermine g).

13. (a) Donner l'expression générale du développement de Taylor à l'ordre 2 d'une fonction $f : U \to \mathbf{R}$ (U ouvert dans $\mathbf{R}^n$) en un point $a \in U$.
(b) Calculer le développement de Taylor à l'ordre 2 de la fonction

$$f(x,y) = \frac{e^{y+sin(xy)}}{1-x+y}$$

au point $(x,y) = (0,0) \in \mathbf{R}^2$.

14. (a) Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ donnée par $f(x,y) = x^3y - x^2y^2 - 2y$. Trouver les points critiques de f et étudier leur nature.
(b) Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ donnée par $x^4 + 3x^2y - y^3 - 2x$. Trouver les points critiques de f et étudier leur nature.
(c) Soit $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ donnée par $f(x,y,z,t) = x^2y^2 + z^2t^2 + xz + yt$. Trouver les points critiques de f et étudier leur nature.

15. Soit $U = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n : x_i > 0 \; i = 1, \ldots, n\} \subset \mathbf{R}^n$. Pour $s > 0$, soit $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ définie par $g(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n - s$ et soit $K = g^{-1}(0)$. Soit $f : U \to \mathbf{R}$ définie par $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n$.

(a) Montrer que $f|_K$ atteint son maximum relatif au point $(\frac{s}{n}, \ldots, \frac{s}{n})$.
(b) En déduire l'inégalité arithmético-géométrique :

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

pour tout nombres positives $x_1, \ldots, x_n$.

16. (a) Trouver la maximum et le minimum de la fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ soumise aux contraintes

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad x - 2y + 3z = 0\,.$$

(b) La trajectoire d'une planète décrit l'ellipse définie par les contraintes :

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad x - 2y + z = 1$$

Trouver la distance maximale et minimale de la planète du point $(0, 0, 1)$ (le centre du système solaire).

17. (a) Montrer que l'équation

$$y^3 + y + e^x = 1$$

définit implicitment y en fonction de x au voisinage de $(0, 0)$. Donner un développement limité à l'ordre 2 en 0 de cette fonction.
(b) Montrer que la fonction $f(x, y) = xy(1 - x - y)$ admet un maximum sur l'ensemble $K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$, et déterminer ce maximum.

18. (a) Déterminer les points critiques de la fonction f de deux variables définie par $f(x, y) = x(x + 1)^2 - y^2$ et préciser leur nature.
(b) Tracer la courbe constituée des points (x, y) tels que $f(x, y) = 0$ et $x \geq 0$.
(c) Montrer que le point $(-1, 0)$ est un point isolé de la partie

$$C = \{(x, y) : f(x, y) = 0\}$$

du plan.
(d) Montrer que, quel que soit le point (x_0, y_0) de C distinct de $(-1, 0)$, au moins une des deux alternatives (i) ou (ii) ci-dessous est vérifiée :

(i) Il existe une fonction g de classe C^1 de la variable x définie dans un intervalle ouvert approprié telle que $g(x_0) = y_0$ et telle que, pour qu'au voisinage de (x_0, y_0) les coordonnées x et y satisfassent à l'équation $f(x, y) = 0$ il faut et il suffit que $y = g(x)$.
(ii) Il existe une fonction h de classe C^1 de la variable y définie dans un intervalle ouvert approprié telle que $h(y_0) = x_0$ et telle que, pour qu'au voisinage de $(x_0, y_0$ les coordonnées x et y satisfassent à l'équation $f(x, y) = 0$ il faut et il suffit que $x = h(y)$.
(vous pouvez citer le théorème de la fonction implicite).