L2 Mathématiques PMRC, Analyse dans $\mathbf{R}^n$

Contrôle No. 2, Nov 2019

Aucun document n'est autorisé, usage de calculatrices interdit

Nom : SOLUTIONS

1. Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'application définie par

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+yz \\ y+xz \\ z+xy \end{pmatrix}$$

(a) Calculer la matrice jacobienne de f et déterminer son rang au point $(x,y,z) = (0,1,-1)$.

(b) Appliquer le théorème de l'application inverse pour déterminer si le système

$$(*)\quad \begin{cases} u(x,y,z) &= x+yz \\ v(x,y,z) &= y+xz \\ w(x,y,z) &= z+xy \end{cases}$$

est resoluble pour x, y, z en fonction de u, v, w dans un voisinage de $(u,v,w) = (-1,1,-1)$ (on ne vous demande pas de trouver la solution).

(a) Soit $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$: Matrice jacobienne $J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & z & y \\ z & 1 & x \\ y & x & 1 \end{pmatrix}$; $J_f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

dont le déterminant égal $1 \times (-1) + 1\,(1-1) = -1 \neq 0$

- elle est de rang 3.

(b) Il s'ensuit que la dérivée $Df\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un isomorphisme, et par le théorème de l'application inverse, il existe un voisinage U de $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et un voisinage V de $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

tel que ~~ø~~ $f : U \to V$ est inversible avec inverse C^1 ; $g : V \to U$

C'est à dire $\forall \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in V$, il existe $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que

SUITE...

$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \left(\Leftrightarrow \begin{matrix} x+yz = u \\ y+xz = v \\ z+xy = w \end{matrix} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = g\left(f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = g\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$

Donc $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in V$ la solution à $(*)$ est donnée par $g\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in U$.

2. Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ la fonction

$$f(x,y,z) = \tfrac{1}{3}x^3 + y^2 z + z^2 - xy.$$

Calculer ses points critiques (il y en a deux) et déterminer leur nature.

En un point critique les dérivées partielles s'annulent :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 - y = 0 \quad (1)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2yz - x = 0 \quad (2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = y^2 + 2z = 0 \quad (3)$$

$(3) \Rightarrow 2z = -y^2$

$(2) \Rightarrow -y^3 - x = 0$

$(1) \Rightarrow +y^6 - y = 0$ soit $y=0$, soit $y^5 - 1 = 0$ seule racine réelle $y = 1$

Si $y = 0$, $(1) \Rightarrow x = 0$, $(3) \Rightarrow z = 0$ pt. critique $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Si $y = 1$, $(3) \Rightarrow z = -1/2$, $(2) \Rightarrow x = 2yz = -1$: $\begin{pmatrix} -1 \\ \cancel{-1/2}\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

Pour déterminer leur nature, on calcule la matrice hessienne :

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -1 & 0 \\ -1 & 2z & 2y \\ 0 & 2y & 2 \end{pmatrix}$$

$$H_f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ valeurs propres : $\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 1)$: $\lambda = 2, 1, -1$

signes différents $\Rightarrow$ point de selle

$$H_f\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$ dét : $2(2-1) - 2(-4) = 2 + 8 \neq 0$: trois valeurs propres non-nulles

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda)\left[(\lambda-2)(\lambda+1) - 4\right] + \left[\lambda - 2\right] = -(\lambda+2)(\lambda^2 - \lambda - 6) + \lambda - 2$$
$$= -\lambda^3 - \lambda^2 + 9\lambda + 10$$

Soit $f(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 + 9\lambda + 10$

FIN

$f(0) = 10$, $\lim_{\lambda \to \infty} f(\lambda) = -\infty$, d'où une racine positive

$f(-2) = 8 - 4 - 18 + 10 = -4$, d'où une racine négative (dans $]-2, 0[$)

signes différents $\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ pt. de selle.