

**Arithmétique et applications, combinatoire et graphes**  
**Devoir préparatoire No. 2, fév-mars 2020, codes BCH**  
**Aucun document n'est autorisé, usage de calculatrices interdit**

1. (i) Montrer que le polynôme  $p(x) = x^4 + x^3 + 1$  est primitif et calculer toutes les puissances  $a^i$  dans le corps  $\mathbb{F}_2[x]/(p(x))$  où  $a = \bar{x} = x + (p(x))$ .

On a la factorisation:

$$x^{15} - 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)(x^4 + x + 1)(x^4 + x^3 + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

dans  $\mathbb{F}_2[x]$ .

(ii) Utiliser le polynôme  $p(x)$  afin de construire un code BCH  $C$  de distance construite 4. Calculer le polynôme générateur  $g(x)$  pour ce code. Il s'agit d'un code linéaire de quelle dimension?

(iii) Un mot  $c$  est transmis avec ce code et on reçoit le vecteur  $r = (011001101001010) \in \mathbb{F}_2^{15}$ , ce qui correspond au polynôme  $r(x) = x + x^2 + x^5 + x^6 + x^8 + x^{11} + x^{13} \in \mathbb{F}_2[x]$ . Calculer les syndromes  $r_1, r_2, r_3, r_4$  comme puissances de  $a$  (utiliser votre tableau), puis calculer le polynôme localisateur d'erreurs  $E(z)$ .

(iv) Enfin trouver les racines de ce polynôme afin de localiser les erreurs. Corriger le vecteur  $r$  afin de trouver le mot  $c$  de  $C$ .

(v) Un deuxième mot  $c_2$  est transmis et on reçoit le vecteur  $r_2 = (000110101101010)$ , ce qui correspond au polynôme  $r_2(x) = x^3 + x^4 + x^6 + x^8 + x^9 + x^{11} + x^{13}$ . Corriger le vecteur  $r_2$  afin de trouver le mot  $c_2$  de  $C$ .

FIN