Géométrie algébrique

§4. Les variétés projectives

On définit l'espace projectif $\mathbb{K}P^n$ comme l'ensemble de sous-espace linéaires de dimension 1 de $\mathbb{K}^{n+1}$:

$$\mathbb{K}P^n = \{[a_0, a_1, \ldots, a_n] : (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}\}$$

$$(a_0, \ldots, a_n) \sim (b_0, \ldots, b_n) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \; t.q. \; a_k = \lambda b_k \; \forall k$$

Les a_k $(k = 0, \ldots, n)$ s'appellent coordonnées homogènes pour $\mathbb{K}P^n$. Parfois on écrit $(a_0 : a_1 : \cdots : a_n)$ au lieu de $[a_0, \ldots, a_n]$. L'inclusion $\mathbb{K}^n \hookrightarrow \mathbb{K}P^n$ donnée par $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto [1, a_1, \ldots, a_n]$ nous servira à comparer les variétés algébriques affines et projectives. On l'appelle *l'espace affine* $\mathbb{K}^n$ *dans* $\mathbb{K}P^n$.

On veut considérer les ensembles algébriques projectifs comme l'ensemble des zéros de polynômes, mais en générale un polynôme quelconque n'est pas bien défini comme fonction des coordonnées homogènes. On considère alors les polynômes f *homogènes* ; ce sont les polynômes pour lesquels tous ses monômes sont du même degré d, pour un certain d. Ce qui équivaut à la condition:

$$f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \ldots, x_n) \qquad \forall \; \lambda \, .$$

Il n'est pas évident comment caractériser les idéaux dans $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ qui définiront les ensembles algébriques. Alors chaque polynôme $f \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ se décompose en ses parties homogènes : $f = \sum_d f^{(d)}$ avec $f^{(d)}$ homogène de degré d pour tout d.

Lemme : *Soit* $I \lhd \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *Il existe un ensemble générateur de* I *qui consiste des polynômes homogènes ;*

(ii) *Pour chaque* $f \in I$ *on a* $f^{(d)} \in I$ *pour tout* d.

Un idéal qui vérifie ces conditions s'appelle un *idéal homogène.*

Preuve : Soit $I = (f_1, \ldots, f_m)$ avec chaque f_k homogène. Alors chaque $f \in I$ s'écrit sous la forme $f = \sum u_k f_k$ pour $u_k \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ (pas nécessairement homogène). Alors $f^{(d)} = \sum (u_k)^{(d - \deg f_k)} f_k \in I$.

Inversement, tout idéal est finiment engendré : $I = (f_1, \ldots, f_m)$. Par l'hypothèse (ii) on sait que $f_k^{(d)} \in I$ pour tout d. Il s'ensuit que I est engendré par les polynômes homogénes $f_k^{(d)}$. q.e.d.

On souligne le fait qu'il n'est pas vrai qu'un idéal homogène ne contient que des polynômes homogènes. Par contre un idéal homogène nous permet de bien définir un ensemble projectif corréspondant.

Soit $I \lhd \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ un idéal homogène (ou juste un ensemble de polynômes homogènes). Alors l'ensemble

$$V(I) := \{[a_0, \ldots, a_n] \in \mathbb{K}P^n : f(a_0, \ldots, a_n) = 0 \ \forall \ f \in I\},$$

s'appelle *l'ensemble algébrique défini par I.* Il est bien défini par le lemme ci-dessus. En effet $V(I)$ ne dépend que de l'ensemble générateur de I qui par le lemme peut être considéré comme constitué des polynômes homogènes.

Inversement, soit $X \subset \mathbb{K}P^n$ un sous-ensemble. Soit $I(X)$ l'idéal engendré par les polynômes homogènes f dans $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ tels que $f(a_0, \ldots, a_n) = 0$ pour tout $[a_0, \ldots, a_n] \in X$. Par sa construction, $I(X)$ est un idéal homogène; on l'appelle l'idéal de X.

Exemple : Soit $L \subset \mathbb{K}^{n+1}$ un sous-ensemble linéaire de dimension $k+1$; il est donné par $n-k$ équations linéaires dans les coordonnées de $\mathbb{K}^{n+1}$. L'image par l'application quotiente : $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{K}P^n$ s'appelle *un sous-espace linéaire de $\mathbb{K}P^n$ de dimension k.* C'est le sous-espace de $\mathbb{K}P^n$ donné par les mêmes équations linéaires (homogène de degré 1). Il est isomorphe (dans un sens à définir) à $\mathbb{K}P^k$. Par exemple, la droite:

$$\{x_2 = x_3 = 0\} = \{[a_0, a_1, 0, 0] \in KP^3\} \subset \mathbb{K}P^3,$$

est isomorphe à $\mathbb{K}P^1$.

Exemple : On considère les deux coniques dans $\mathbb{K}^2$:

$$X_1 = \{x_2 = {x_1}^2\} \quad \text{et} \quad X_2 = \{x_1 x_2 = 1\}.$$

On veut les compactifier à des ensembles algébriques de $\mathbb{K}P^2$. Il faut alors que les polynômes qui les déterminent soient homogènes. Pour achever l'homogénéité on utilise la coordonnée x_0 qui prend la valeur 1 sur l'espace affine $\mathbb{K}^2 \hookrightarrow \mathbb{K}P^2$. On définit

$$\widetilde{X}_1 = \{x_0 x_2 = {x_1}^2\} \quad \text{et} \quad \widetilde{X}_2 = \{x_1 x_2 = {x_0}^2\},$$

dans $\mathbb{K}P^2$.

On appelle les points à l'infini les points où $x_0 = 0$. On considère $\widetilde{X}_1$. A l'infini, si on a $x_0 = 0$ on a $x_1 = 0$ aussi, donc, nécessairement $x_2 \neq 0$, car on ne peut pas avoir $x_0 = x_1 = x_2$ simultanément dans l'espace projectif. On a alors ajouté le seul point $[0, 0, 1]$ à l'infini.

On applique le même processus pour $\widetilde{X}_2$: puisque $x_0 = 0$, alors $x_1 x_2 = 0$ et on voit qu'il y a deux points : $[0, 1, 0]$ et $[0, 0, 1]$ à l'infini.

On remarque que $\widetilde{X}_1$ et $\widetilde{X}_2$ sont identiques à une permutation des coordonnées près. Ce sont des variétés isomorphes (toujours à définir). En fait il n'exite qu'une seule conique dans $\mathbf{C}^2$ à un isomorphisme près.

Comme pour le cas affine, on a les propriétés suivantes :

• Soient $I_1 \subset I_2$ idéaux homogènes dans $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$, alors $V(I_2) \subset V(I_1)$;

• Soient $\{I_k\}$ une famille d'idéaux homogènes dans $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$, alors $\cap_k V(I_k) = V(\cup_k I_k) \subset \mathbb{K}P^n$;

• Soient $I_1, I_2 \subset \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ idéaux homogènes, alors $V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 I_2) \subset \mathbb{K}P^n$.

Ce qui nous permet de définir la topologie de Zariski sur $\mathbb{K}P^n$ comme la topologie dont les fermés sont les ensembles algébriques. Irréductibilité est un concept topologique d'où on définit les variétés algébriques irrédctibles dans $\mathbb{K}P^n$ comme dans le cas affine. Un ensemble algébrique dans $\mathbb{K}P^n$ est irréductible si et seulement si son idéal $I(X)$ est premier.

On veut comprendre la corréspondance entre les variétés affines dans $\mathbb{K}^{n+1}$ et les variétés projectives dans $\mathbb{K}P^n$ donnée par le même idéal homogène. Un ensemble algébrique $X \subset \mathbb{K}^{n+1}$ s'appelle un *cône* s'il est non-vide et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a

$$(a_0, \ldots, a_n) \in X \quad \Rightarrow \quad (\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) \in X \, .$$

Soit $X \subset \mathbb{K}P^n$ un ensemble algébrique, alors le cône sur X est l'ensemble:

$$C(X) := \{(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1} : [a_0, \ldots, a_n] \in X\} \cup \{0\} \, .$$

En effet c'est un ensemble algébrique dans $\mathbb{K}^{n+1}$ qui est une réunion de droites passant par l'origine.

Donné un idéal homogène I dans $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$, on écrit $V_A(I)$ pour la variété affine corréspondant dans $\mathbb{K}^{n+1}$, et $V_P(I)$ pour la variété projective correspondante dans $\mathbb{K}P^n$. La preuve du lemme suivant est une conséquence des définitions.

Lemme

(i) Soit $I \subsetneq \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ un idéal homogène. Si $X = V_P(I) \subset \mathbb{K}P^n$, alors $C(X) = V_A(I) \subset \mathbb{K}^{n+1}$.

(ii) Reciproquement, si $X \subset \mathbb{K}P^n$ est un ensemble algébrique projectif et $I(X) \subset \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ est son idéal corréspondant, alors $I(C(X)) = I(X)$.

Autrement dit, il y a une corréspondance entre les ensembles algébriques projectifs dans $\mathbb{K}P^n$ et les cônes affines dans $\mathbb{K}^{n+1}$, donnée par l'ensemble des zéros du même idéal homogène (différent de l'idéal (1)) soit dans $\mathbb{K}P^n$ soit dans $\mathbb{K}^{n+1}$.

On note que l'idéal homogène $(x_0, \ldots, x_n)$ ne détermine aucun zéro dans $\mathbb{K}P^n$, même si cet idéal n'est pas égale à (1). Il faut en tenir compte de ce fait pour bien exprîmer les corréspondances données par V et I.

Proposition (version projective du Nullstellensatz) On suppose $\mathbb{K}$ algébriquement fermé.

(i) Si $X_1 \subset X_2$ sont ensembles algébriques dans $\mathbb{K}P^n$, alors $I(X_2) \subset I(X_1)$;

(ii) Pour un ensemble algébrique $X \subset \mathbb{K}P^n$ on a $V_P(I(X)) = X$;

(iii) Pour tout idéal homogène $I \subset \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ tel que $V_P(I)$ est non-vide, on a $I(V_P(I)) = \sqrt{I}$;

(iv) Pour tout idéal homogène $I \subset \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ tel que $V_P(I)$ est vide, soit $I = (1)$ soit $\sqrt{I} = (x_0, \ldots, x_n)$.

Preuve : les démonstrations de (i) et (ii) sont identiques au cas affine. Pour (iii), on suppose que $X = V_P(I))$. Alors

$$I(V_P(I)) = I(X) = I(C(X)) = I(V_A(X)) = \sqrt{I}\,,$$

par le Nullstellensatz pour les variétés affines. Pour la partie (iv), si $V_P(I)$ est vide, soit $V_A(I)$ est vide soit il contient le seul point $\{0\}$. Ce qui nous ramène à la conclusion que $I = (1)$ ou $\sqrt{I} = (x_0, \ldots, x_0)$ (voir § 2, corollaire 0.7). q.e.d.