

Arithmétique et applications, combinatoire et graphes

Contrôle No. 3, 28 mars 2018, graphes

Aucun document n'est autorisé, usage de calculatrices interdit

NOM : SOLUTIONS

1. Calculer le polynôme chromatique du graphe suivant. Combien de colorations y a-t-il avec 2 couleurs, avec 3 couleurs ? Si une telle coloration existe, donner un exemple. Pour information, le polynôme chromatique du graphe cyclique C_n d'ordre n est $(k-1)^n + (-1)^n(k-1)$.

$P_G(k) = (k-1)^5 - (k-1) - 2k(k-1)^2(k-2)$

$= (k-1) \left[k^5 - 5k^4 + 10k^3 - 10k^2 + 5k - 1 - k + 1 - 2k(k^2 - 2k + 1)(k-2) \right]$

$= k^5 - 5k^4 + 10k^3 - 10k^2 + 4k - 2k(k^3 - 4k^2 + 5k - 2)$

$= k^5 - 7k^4 + 18k^3 - 20k^2 + 8k$

$(= k(k-1)(k-2)^3)$

Nombre de colorations avec 2 couleurs = $P_G(2) = 0$

Nombre de colorations avec 3 couleurs = $P_G(3) = 2^5 - 2 - 2 \times 3 \times 2^2 = 32 - 2 - 24 = 6$

$G-e$

$(k-1)^5 - (k-1) - k(k-1)^2(k-2)$

G/e

$k(k-1)^2(k-2)$

$(k-1)^5 - (k-1)$

isomorphe

$k^2(k-1)(k-2) - k(k-1)(k-2)$

$= k(k-1)^2(k-2)$

$k^2(k-1)(k-2)$

$k(k-1)(k-2)$

$P_G(k) = k^5 - 7k^4 + 18k^3 - 20k^2 + 8k$ ce qui correspond à ce qu'on attendait: coeff. principal 1, coeff de $k^4 = -7 = -$ nombre d'arêtes, SUITE... signes alternées, aucun coeff constant

2

2. Parmi les suites de degrés suivantes, lesquelles sont graphiques ?

(543211)

(44332211)

Dans le cas où la suite est graphique, construire un graphe simple avec la même suite de degrés ; et, si c'est possible, construire un graphe simple connexe avec la même suite de degrés.

(543211)

↓
(3,2,1,0,0)

↓
Impossible donc (543211) n'est pas graphique

(44332211)

↓
(3221211)

↓ réarrange
(3222111)

↓
(111111)

graphique

