Arithmétique et applications, combinatoire et graphes

Feuille TD 1 : notions de base, matrice d'adjacence, graphes eulériens

1. Soit $G = (X, A)$ le graphe simple $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{13, 35, 57, 71, 19, 24, 46, 68, 82, 29\}$. Dessiner G. Est-ce-qu'il est connexe ?

Trouver la distance entre les sommets 5 et 8.

Quel est le diamètre de G ?

Est-ce-que G contient un cycle eulerien ?

Est-ce-que G contient une chaîne eulerienne ?

Est-ce-que G est hamiltonien ?

2. (i) Dessiner les 5 premiers graphes complets K_i, $i = 1, \ldots, 5$.

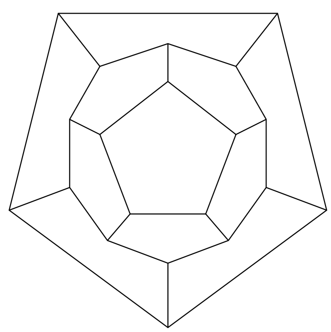
(ii) Dessiner le graphe biparti $K_{4,2}$.

(iii) Montrer qu'un graphe simple a un nombre pair de sommets de degré impair.

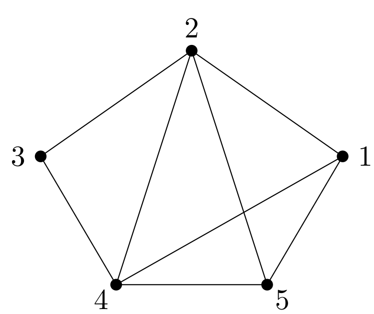
(iv) Est-il possible de relier 15 ordinateurs de sorte que chaque appareil soit relié avec exactement trois autres ?

(v) Est-il possible de relier 5 ordinateurs de sorte que chaque appareil soit relié avec exactement deux autres ?

3. Montrer que le graphe suivant est hamiltonien.

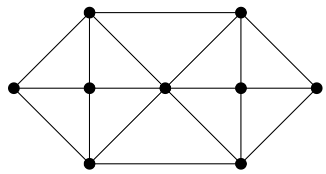


4. Calculer la matrice d'adjacence du graphe suivant :

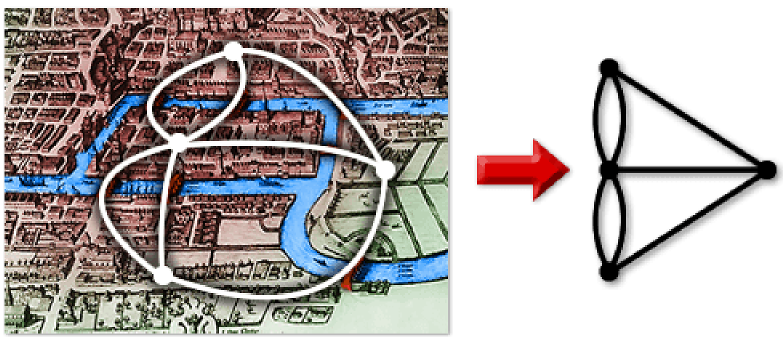


Déterminer le nombre de chemins de longueur 3 allant du sommet 3 au sommet 5.

5. Est-ce-que le graphe suivant contient un chemin eulérien ? Si oui, le construire (inventer votre propre notation afin d'indiquer le chemin).

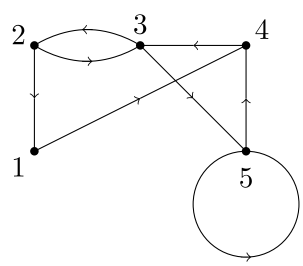


6. On dit que la théorie des graphes a commencé avec le problème des ponts de Königsberg considéré par Euler en 1736 :



Dans ce problème on veut trouver un promenade fermé qui traverse tous les ponts exactement une fois. Dans sa formation en termes de graphes, on cherche un chemin qui traverse chaque arête exactement une fois. Est-ce-que c'est possible ?

7. (i) Donner la matrice d'adjacence du graphe



Interpreter la somme des coefficients de chaque ligne (de chaque colonne). Existe-t-il un chemin eulérien (un chemin qui parcourt chaque arête orientée une et une seule fois)?

(ii) Montrer qu'un graphe connexe orienté (eventuellement avec arêtes multiples et boucles) est eulérien si et seulement si $d^+(x) = d^-(x)$ pour chaque arête x.

(iii) Montrer qu'un graphe connexe orienté G est eulérien ssi chaque composante connexe de $G \setminus \varphi$ est eulérien, pour φ un cycle orienté quelconque.