Arithmétique et applications, combinatoire et graphes

Feuille TD 3 : nombres de Ramsey

1. Montrer qu'il existe une coloration rouge/bleue du graphe complet K_5 qui ne contient ni un triangle rouge, ni un triangle bleu. En déduire que $K(3,3) = 6$.

2. (a) Appliquer le lemme du cours : $R(r,s) \leq R(r-1,s) + R(r,s-1)$ pour montrer que

$$R(k,\ell) \leq \left(\begin{array}{c} k+\ell-2 \\ k-1 \end{array} \right).$$

(b) Montrer que $R(k,2) = k$ pour tout k.

3. On suppose donnée une coloration par les couleurs rouge et bleue des arêtes du graphe complet d'ordre 9 : $K_9 = (X,A)$. Soit $x \in X$ un sommet de K_9 et soit

$$B_x := \{y \in X : xy \text{ bleue}\}, \qquad R_x := \{y \in X : xy \text{ rouge}\}.$$

Montrer que si le cardinal $|R_x| \geq 4$ alors le graphe contient soit un triangle rouge soit un K_4 bleu. Montrer que si le cardinal $|B_x| \geq 6$ alors le graphe contient soit un triangle rouge soit un K_4 bleu. En déduire que quelque soit la coloration des arêtes de K_9 par les couleurs rouge et bleue, il existe toujours soit un triangle rouge, soit un K_4 bleu. En déduire $R(3,4)$.

4. L'objectif de cette question est de montrer que le nombre de Ramsey $R(3,5) = 14$. Montrer d'abord que $R(3,5) \leq 14$ (vous pouvez supposer que $R(3,4) = 9$).

On doit ensuite montrer qu'il existe une coloration rouge/bleue de K_{13} qui ne contient ni un triangle rouge ni un K_5 bleu.

• Identifier les sommets de K_{13} avec les éléments de $\mathbb{F}_{13} = \mathbf{Z}/13\mathbf{Z} = \{0,1,\ldots,12\}$.

• Calculer toutes les résidus cubiques modulo 13, c'est à dire toutes les valeurs $x^3 \mod 13$ où $x \in \mathbf{Z}$. On note cet ensemble par $R \subset \mathbb{F}_{13}$. On remarque que $1 \in R$ et $-1 \in R$ (en identifiant $-1 = 12 \mod 13$).

• On définit alors la coloration suivante de K_{13} : l'arête $\{i,j\}$ $(i \neq j)$ est coloriée rouge si et seulement si $i - j \in R$ (on remarque que $i - j \in R \Leftrightarrow j - i \in R$).

• On montre que cette coloration ne contient aucun triangle rouge.

• Ensuite on montre que cette coloration ne contient aucun K_5 bleu. Pour ça on choisit 5 sommets. On peut supposer par symétrie que 0 est un de ces sommets. Alors, si l'un des autres sommets choisis fait parti de R, il existe une arête rouge (pourquoi?), donc si on veut construire un K_5 blue on doit éviter R. En plus, si deux sommets choisis sont consécutifs modulo 13 on aurait une arête rouge (pourquoi ?)... Conclure.

5. (a) Soit p un nombre premier ≥ 3. On dit qu'un entier r est un résidu quadratique modulo p s'il existe un entier x tel que

$$x^2 = r \pmod{p}$$

Dans ce cas on appelle x la racine carrée de r.

(i) Montrer que la racine carrée d'un résidu quadratique est unique à une signe près, c'est à dire que

$$0 = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) \pmod{p} \quad \Rightarrow \quad \text{soit } x = y \text{ soit } x = -y \pmod{p}$$

En déduire que dans $\mathbb{F}_p^* = \{1, 2, \ldots, p-1\}$ on a $\frac{p-1}{2}$ résidus quadratiques et $\frac{p-1}{2}$ non-résidus quadratiques.

(ii) Soient $r, s \in \mathbb{F}_p^*$. Montrer que

- r résidu quadratique $\Rightarrow$ son inverse multiplicatif r^{-1} est un résidu quadratique ;
- r, s résidus quadratiques $\Rightarrow$ rs résidu quadratique ;
- r résidu quadratique et s non-résidu quadratique $\Rightarrow$ rs non-résidu quadratique ;
- r, s non-résidus quadratiques $\Rightarrow$ rs résidu quadratique.

(b) Les résidus quadratiques $\mod 17$ sont : $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8 \pmod{17}$. On considère le graphe complet K_{17} d'ordre 17. On identifie les sommets avec les entiers $\mod 17$ et on colorie l'arête xy ($x, y \in \mathbb{F}_{17}$) rouge si

$$x - y = \pm 1, \pm 2, \pm 4 \text{ ou } \pm 8 \pmod{17},$$

sinon, on la colorie bleue.

(i) Montrer qu'il n'existe ni un sous-graphe complet K_4 rouge, ni un sous-graphe complet K_4 bleu.

(ii) Donné que le nombre de Ramsey $R(3,4) = 9$, que peut-on conclure sur le nombre de Ramsey $R(4,4)$?

<u>Indication</u> : Pour la partie (b)(i), sans perdre la généralité, on peut supposer que tout sous-ensemble de quatre sommets qui engendre un K_4 rouge contient 0 et 1 (noter que : $x - y = (x+a) - (y+a) \pmod{17}$; de la partie (a), si $x - y$ est un résidu quadratique non-nul, il en est de même pour $r(x-y)$ où r est un résidu quadratique non-nul). Quelles sont les possibilités pour les deux autres sommets ?
D'autre part, si on a un sous-graphe complet K_4 bleu, que se passe-t-il si on multiplie tous les sommets par un non-résidu quadratique ?