Arithmétique et applications, graphes et combinatoire

Cours No. 6, Théorie des graphes : suites de degrés

Dans ce chapitre tous les graphes seront simples.

<u>Définition</u> : Soit $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ une suite décroissante d'entiers non-negatifs. Une telle suite est *graphique* s'il existe un graphe simple dont les degrés de ses sommets corréspondent à cette suite.

Notre objectif est d'identifier les suites graphiques.

Echanges d'arêtes : Soit $G = (X, A)$ un graphe simple. Soient $uv, xy \in A$ deux arêtes telles que $ux, vy \notin A$. On effectue une échange des arêtes en remplaçant uv et xy par ux et vy. On remarque qu'une telle échange ne modifie pas les degrés des sommets. Si H se déduit de G par des échanges 2 par 2, on écrit

$$G \xrightarrow{2-2} H$$

Dans un graphe G on définit le voisinage d'un sommet x comme l'ensemble des sommets voisins : $V_G(x) = \{y \in X : y \sim x\}$.

<u>Lemme</u> : Soit $G = (X, A)$ un graphe simple d'ordre n avec suite de degrés $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ tel que $d(x_i) = d_i$ pour $i = 1, \ldots, n$. Alors il existe un graphe simple G' tel que $G \xrightarrow{2-2} G'$ et $V_{G'}(x_1) = \{x_2, \ldots x_{d_1+1}\}$.

<u>Preuve</u> : On suppose qu'il existe $x_i \in X$, $2 \leq i \leq d_1 + 1$ tel que $x_1x_i \notin A$. Puisque $d(x_1) = d_1$, il existe x_j avec $j \geq d_1 + 2$ tel que $x_1x_j \in A$. En plus, le fait que $d_i \geq d_j$ implique qu'il existe x_t $(2 \leq t \leq n)$ tel que $x_ix_t \in A$ et $x_jx_t \notin A$. On effectue une échange 2 par 2 par rapport à x_1, x_j, x_i, x_t, ce qui donne un nouveau graphe $G' = (X, A')$ où $x_1x_i \in A'$ et $x_1x_j \notin A'$ et les autres voisins de x_1 sont inchangés. On repète le processus pour tous les indices i avec $x_1x_i \notin A$ pour $2 \leq i \leq d_1 + 1$. □

<u>Théorème</u> (Berge 1973) Deux graphes $G = (X, A)$ et $H = (X, F)$ ayant le même ensemble de sommets X vérifient $d_G(x) = d_H(x)$ pour tout $x \in X$ si et seulement si H se déduit de G par une suite d'échanges 2 par 2.

<u>Preuve</u> : Si $G \xrightarrow{2-2} H$, clairement les degrés des sommets de G sont égaux à ceux de H.

Reciproquement : récurrence sur l'ordre de G. On suppose que les sommets de G et H ont des mêmes degrés. Par le lemme, il existe $x \in X$ et des graphes G' et H' tels que $G \xrightarrow{2-2} G'$ et $H \xrightarrow{2-2} H'$ avec $V_{G'}(x) = V_{H'}(x)$. Il s'ensuit que les graphes $G' - x$ et

$H'-x$ ont les mêmes degrés. Par récurrence $G'-x \xrightarrow{2-2} H'-x$ et donc aussi $G' \xrightarrow{2-2} H'$. Enfin, on note que $H' \xrightarrow{2-2} H$ par l'inverse de l'opération $H \xrightarrow{2-2} H'$. $\square$

<u>Théorème</u> (Havel 1955, Hakim 1962) : Une suite $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ avec $d_1 \geq 1$ et $n \geq 2$ est graphique si et seulement si

$$d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n \tag{1}$$

est graphique (lorsque cette dernière est mise en ordre décroissante).

<u>Preuve</u> : ($\Leftarrow$) Soit G d'ordre $n-1$ avec sommets et degrés :

$$d(x_2) = d_2 - 1, \ldots, d(x_{d_1+1}) = d_{d_1+1} - 1, d(x_{d_1+2}) = d_{d_1+2}, \ldots, d(x_n) = d_n\,.$$

On ajoute un nouveau sommet x_1 et les arêtes x_1x_i pour $2 \leq i \leq d_{d_1+1}$. Dans le nouveau graphe on a $d(x_1) = d_1$ et $d(x_i) = d_i$ pour tout i.

($\Rightarrow$) On suppose $d_G(x_i) = d_i$. Par le lemme et le théorème de Berge, on peut supposer que $V_G(x_1) = \{x_2, \ldots, x_{d_1+1}\}$. Mais dans ce cas, la suite de degrés dans $G - x_1$ est donnée par (1). $\square$

<u>Exemple</u> :

$$\begin{aligned} & (4,4,4,3,2,1) \text{ est graphique} \\ \Leftrightarrow\ & (3,3,2,1,1) \text{ est graphique} \\ \Leftrightarrow\ & (2,1,1,0) \text{ est graphique} \\ \Leftrightarrow\ & (0,0,0) \text{ est graphique} \end{aligned}$$

Cette dernière est évidemment graphique. On remarque que la preuve donne le processus par lequel on construit un graphe avec suite de degrés $(4,4,4,3,2,1)$ à partir de celui avec suite $(0,0,0)$.

On admet le théorème suivant sans preuve.

<u>Théorème</u> (Erdős-Gallai 1960) $d_1 \geq \cdots \geq d_n$ est graphique si et seulement si $d_1 + \cdots + d_n$ est paire et

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{d_i, k\}$$

est satisfaite pour tout $1 \leq k \leq n$.

<u>Théorème</u> : Soit $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ une suite graphique telle que $d_n > 0$ et $\sum_i d_i \geq 2(n-1)$ (c'est à dire le nombre d'arêtes est $\geq n-1$). Alors la suite est graphique pour un graphe connexe.

Preuve : On suppose G un graphe qui corréspond à la suite. Soient C_1 et C_2 deux composantes connexes telles que C_1 n'est pas un arbre (on se rappelle qu'un arbre d'ordre m contient exactement $m-1$ arêtes). Soit xy une arête de C_1 dont sa suppression ne déconnecte pas C_1. Soit uv une arête quelconque de C_1. Alors l'échange 2 par 2 : $xy, uv \mapsto xv, yu$ crée une seule composante connexe et ne modifie pas les degrés. On continue ainsi jusqu'à une seule composante connexe est créée ou on a plusieurs arbres ; mais ce dernier est impossible car par hypothèse le nombre d'arêtes est $\geq n-1$. $\square$