

UNIVERSITE DE BRETAGNE OCCIDENTALE

Année Universitaire 2017–18

L3 STU parcours hydrographie, harmonisation maths

épreuve d'entraînement.

Durée : 2 heures

HARMONISATION MATHÉMATIQUES

aucun document autorisé

usage de calculatrices interdit, tous les calculs se font à la main

chaque réponse devra être justifiée

Certaines formules sont à connaître, certaines sont données à la fin de l'épreuve.

1. (Quelques petites questions pour commencer) (a) Calculer la primitive $\int \sqrt{1+x} dx$.
(b) Calculer la position du foyer de la parabole : $y = x^2 + x + 1$.
(c) Expliciter la droite déterminée par l'intersection des deux plans

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 5x - y + z = 0 \end{cases}$$

- (d) Calculer le gradient de la fonction $f(x, y) = x^2y + 2x - y + 1$. Trouver tous les points où il s'annule.

2. (Trigonométrie sphérique) (a) Définir la latitude et la longitude d'un point sur une sphère. Exprimer la distance géodésique entre deux points d'une sphère de rayon r en termes de leurs longitudes et latitudes.

On note la latitude et la longitude d'une ville A par φ_A et λ_A respectivement. On suppose A est de coordonnées ($\varphi_A = 60^\circ, \lambda_A = 0^\circ$), B de coordonnées ($\varphi_B = 0^\circ, \lambda_B = 0^\circ$) et C de coordonnées ($\varphi_C = -30^\circ, \lambda_C = 90^\circ$). On prend le rayon de la terre comme 6400kms.

- (b) Donner un croquis de la terre indiquant les positions de ces trois villes.
- (c) Calculer la distance géodésique d_{AC} entre A et C (exprimer la réponse en termes de arccos). Est-ce-que cette distance est supérieure ou inférieure au rayon de la terre ?
- (d) Calculer les distances géodésiques d_{BC} entre B et C et d_{AB} entre A et B . Enfin, donner une expression pour l'angle \widehat{ACB} du triangle sphérique formé par A, B et C .

3. (Géométrie dans l'espace) (a) Donner une paramétrisation de la droite D passant par les deux points $A : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B : \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(b) Trouver le point d'intersection I de cette droite avec le plan $P : 2x + y - z - 1 = 0$.

(c) Lequel des deux points A et B est le plus proche du plan P ?

(d) Donner une expression pour l'angle entre la droite D et le normal au plan P .

4. (Matrices) (a) Soient A, B et C les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Parmi les produits proposés suivants :

$$AB, \quad BA, \quad AC, \quad CA, \quad BC, \quad CB$$

lesquels sont légitimes ? Dans les cas où le produit est bien défini, le calculer.

(b) Calculer la comatrice, le déterminant et l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} x & +2z & = & 2 \\ -x & +y & = & -1 \\ 2x & +3y & -z & = & 1 \end{cases}$$

Formules éventuellement utiles : • Loi des cosinus pour un triangle sphérique :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \widehat{CAB}.$$

• Le foyer de la parabole $y^2 = 2ax$ est de coordonnées : $(a/2, 0)$.

FIN