SHOM parcours hydrographie, harmonisation maths

Exercices d'entrainement

Trigonométrie sphérique :

1. Soit A et B deux points de la surface terrestre localisés à des longitudes $\lambda_A = 0^o$ et $\lambda_B = 90^o$ et appartenant au même parallèle de latitude $\varphi = 60^o$. Calculer la distance géodésque d_{AB} entre A et B. Quelle distance d'_{AB} parcourt-on pour aller de A à B en restant sur le même parallèle ? Comparer ces deux distances. A quelle latitude φ doivent être A et B pour que l'on ait $d'_{AB} = d_{AB}$? On prendra le rayon de la terre comme 6400km.

2. On considère quatre points A, B, C, C' sur une sphère de rayon 1. Les longitudes et latitudes sont respectivement : $(\lambda_A = 45^o, \varphi_A = 0)$, $(\lambda_B = 0, \varphi_B = 0)$, $(\lambda_C = 90^o, \varphi_C = 0)$, $(\lambda_{C'} = 180^o, \varphi_{C'} = 0)$.

(a) Calculer les distances géodésique entre A et C et entre A et C'.

(b) Calculer les angles intérieurs des triangles sphériques ABC et ABC'. Calculer et comparer les aires de ces triangles.

Géométrie dans le plan et dans l'espace

3. On suppose donné un triangle dans le plan de sommets $O : \begin{pmatrix} x_O \\ y_O \end{pmatrix}$, $A : \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B : \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$. Trouver les coordonnées de $C : \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$ tel que $OACB$ soit un parallèlogramme.

Maintenant on suppose ces quatres points placés dans l'espace à trois dimensions avec coordonnée z égale à 0. A l'aide du produit vectoriel, trouver une formule nette pour l'aire du parallèlogramme $OACB$ et par suite l'aire du triangle OAB.

Calculer l'aire du triangle de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4. (a) Donner la définition de <u>vecteur directeur</u> d'une droite dans l'espace à trois dimensions. Est-ce-que le vecteur directeur est unique ? Expliquer comment on détermine une droite par les donnés d'un point de la droite et son vecteur directeur.

(b) Expliciter un point et un vecteur directeur de la droite déterminée par l'intersection des deux plans

$$\begin{cases} x + 2y - z &= 3 \\ 5x - y + z &= 0 \end{cases}$$

5. Qu'est ce qu'on comprend par la distance d'un point à un plan dans l'espace ?

Calculer la distance du point $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ au plan $5x - y + 2z = 3$.

6. Qu'est ce qu'on comprend par la distance d'un point à une droite dans l'espace ? Calculer la distance du point $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ à la droite déterminée par l'intersection des deux plans $x + y - z = 1$ et $2x - y + z = 2$.

7. Donner la formule pour la distance d'un point à une droite dans le plan.

La côte d'un pays est approximée par la droite $2x - y + 2 = 0$. On navige dans la mer le long de la droite passant par le point $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Trouver le point P le long de cette droite qui est à une distance 1 de la côte. Si l'echèlle de la carte est en kilomètres et le bateau traverse la mer à 10km/hr. Combien de temps est-ce-qu'on prend pour aller de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ jusqu'à P ?

Coniques

8. Donner la définition de la conique de directrice D, de foyer F et d'excentricité e.

Trouver l'équation en coordonnées cartésiennes (x, y) de la conique de directrice $x - y - 1 = 0$, de foyer $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'excentricité 2.

Trouver l'équation de son axe focal et calculer les deux points où la conique coupe cet axe. En déduire le centre de la conique.

9. Le but de cette question est d'identifier la conique $xy = \frac{1}{2}$.

On se rappelle qu'un rotation dans le plan par un angle θ est donnée par la transformation :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

Expliciter la transformation qui correspond à une rotation par $\pi/4$. Trouver la transformation inverse, c'est à dire expliciter x et y en fonction de X et Y.

Réécrire l'équation $xy = \frac{1}{2}$ en termes de X et de Y. Identifier alors la nature de la conique, ses foyers et son axe focal (en termes de X et de Y). Enfin, expliciter ces paramètres dans les coordonées x et y.

Matrices

10. Soient A, B et C les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Parmi les produits proposés suivants :

$$AB, \quad BA, \quad AC, \quad CA, \quad BC, \quad CB$$

lesquels sont légitimes ? Dans les cas où le produit est bien défini, le calculer.

11. Soit A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer son déterminant, sa comatrice et son inverse.

(b) Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} 3x & +2y & +z & = & -2 \\ x & +y & +z & = & 1 \\ x & & +2z & = & -1 \end{cases}$$

Calcul différentiel

12. On vous donne les primitives : $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x$ et $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x$.
Calculer les primitives :

$$\int \frac{1}{1+4x^2}\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x\,.$$

13. Calculer la primitive $\displaystyle\int x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$ (indication : on propose la substitution $u = 1 + x^2$).

14. Soit f la fonction de deux variables $f(x, y) = x^2y - y^2x + 2xy$.

(a) Calculer toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2.

(b) Calculer le gradient de f.

(c) Trouver tous les points où le gradient s'annulle.