Solutions aux exercices II

§ 2.3 I a) equation d'un plan avec normal $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$: $ax+by+cz+d=0$

d'où on a l'expression $x+2y+z+d=0$, mais le plan passe par $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d'où $3-2+2+d=0 \Rightarrow d=-3$

$$\boxed{x+2y+z-3=0}$$

b) Plan passant par $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Deux vecteurs dans le plan $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

normal au plan $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\times\vec{\imath} - 0\times\vec{\jmath} - 2\vec{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

equation: $1\times x + 0\times y - 2\times z + d = 0 \Rightarrow x - 2z + d = 0$

Mais $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est dans le plan, d'où $-1+d=0 \Rightarrow d=1$

$$\boxed{x-2z+1=0}$$

c) plan contient la droite passant par $X=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et avec vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

il contient aussi le point $Y=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Deux vecteurs dans le plan sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{XY} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

normal: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{\imath}\times 1 - \vec{\jmath}\,(1+2) + \vec{k}\,(0+1)$

$= \vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + \vec{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

equ: $x-3y+z+d=0$

le plan contient $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ d'où $1+d=0 \Rightarrow d=-1$

$$\boxed{x-3y+z-1=0}$$

II a) $\boxed{t \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \text{ scalaire}}$

(b) Droite passant par $X: \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

vecteur directeur : $\overrightarrow{XY} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Solution $\boxed{\text{paramétrisation } t \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$

II c) $\begin{cases} x+y-2z=1 & (1) \\ 3x-y+z=2 & (2) \end{cases} \xRightarrow{(1)+(2)} \begin{cases} 4x-z=3 & (3) \\ x+y-2z=1 & (1) \end{cases}$

On pose $x=t$: $(3) \Rightarrow z = 4t-3$

$(1) \Rightarrow y = 1+2z-x = 1+2(4t-3)-t = 7t-5$

Solution : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 7t-5 \\ 4t-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$, point dans la droite $\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{cases} x+2y-z=3 & (1) \\ 5x-y+z=0 & (2) \end{cases} \xRightarrow{(1)+(2)} \begin{cases} 6x+y=3 & (3) \\ x+2y-z=3 & (1) \end{cases}$

Soit $x=t$ $(3) \Rightarrow y = 3-6t$

$(1) \Rightarrow z = x+2y-3 = t+2(3-6t)-3 = -11t+3$

Solution $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -6t+3 \\ -11t+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -11 \end{pmatrix}$

vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -11 \end{pmatrix}$, point dans la droite $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

III (a) distance entre le plan $ax+by+cz+d=0$ et le point $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$:

$$h = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,|ax_0+by_0+cz_0+d|$$

plan $x-2y-z-2=0$ pt. $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: $h = \frac{1}{\sqrt{1+4+1}}\,|-1-1-2| = \frac{4}{\sqrt{6}}$

plan $x-2y-z+2=0$ pt $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: le point est dans le plan
la distance est alors 0.

b) Droite : $t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ plan $2x-y+z-1=0$

normal au plan $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; puisque le vecteur directeur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est orthogonal au normal, la droite est parallèle au plan.
Pour calculer sa distance, il suffit de prendre un point de la droite, disons $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et calculer sa distance au plan :

$$h = \frac{1}{\sqrt{4+1+1}}\,|2-1| = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

IV

a) $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}$, $\vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath}$, $\vec{k} \wedge \vec{\imath} : \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{\jmath}\,(-1) = \vec{\jmath}$.

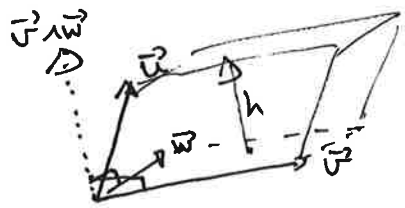
b)
$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{\imath}\,(0-1) - \vec{\jmath}\,(-1-2) + \vec{k}\,(-1-0)$$
$$= -\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c)
$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ -v_1w_3 + v_3w_1 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ -v_1w_3 + v_3w_1 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix} = v_1\,(v_2w_3 - v_3w_2) + v_2\,(-v_1w_3 + v_3w_1) + v_3\,(v_1w_2 - v_2w_1)$$

$$= \cancel{v_1v_2w_3} - \cancel{v_1v_3w_2} - \cancel{v_1v_2w_3} + \cancel{v_2v_3w_1} + \cancel{v_1v_3w_2} - \cancel{v_2v_3w_1} = 0.$$

De même $\vec{w} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = 0$



$\vec{v} \wedge \vec{w}$ est orthogonal à $\vec{v}$ et $\vec{w}$ avec longueur l'aire du parallélogramme engendré par $\vec{v}$ et $\vec{w}$

Volume du parallélépipède est l'aire du parallélogramme qui est sa base fois sa hauteur.

Mais la hauteur h est donnée par le produit scalaire entre $\vec{u}$ et un vecteur unité dirigé dans le sens orthogonal à la base, c'est à dire $\dfrac{\vec{v} \wedge \vec{w}}{\|\vec{v} \wedge \vec{w}\|}$, donc $h = \dfrac{\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})}{\|\vec{v} \wedge \vec{w}\|}$

et le volume est $\underbrace{\|\vec{v} \wedge \vec{w}\|}_{\text{aire de la base}} \times \underbrace{\dfrac{\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})}{\|\vec{v} \wedge \vec{w}\|}}_{h} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$

V Droite D passant par X avec vecteur directeur $\vec{u}$; Q point

$$d(Q, D) = \frac{\|\overrightarrow{XQ} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

(a) On applique la formule: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{XQ} = Q - X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{XQ} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 5\vec{k} \quad : \|\overrightarrow{XQ} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{9+1+25} = \sqrt{35}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

$$d = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{6}}$$

V (G) équ: $ax + by + c = 0$ alors $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ font partie de la droite, d'où $\begin{cases}-a + c = 0\\ a + b + c = 0\end{cases}$ on prend la forme $b + 2c = 0$

$\Longrightarrow b = -2c$

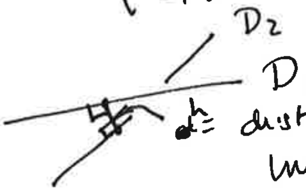
puis $a = c$

Or pose $c = 1$ ~~et puis~~ (a, b, c ne sont que définis à un multiple près), d'où $a = 1$, $b = -2$

~~Sa~~ et son équation est $x - 2y + 1 = 0$

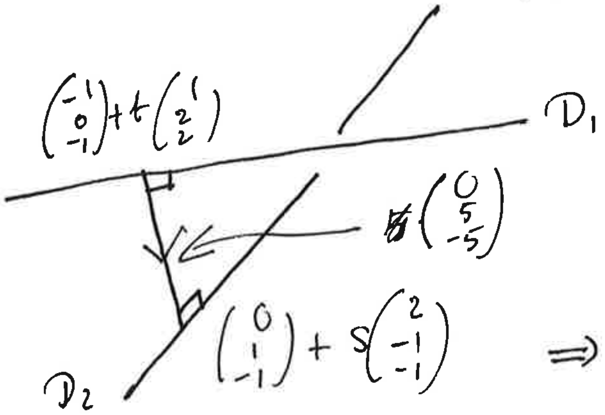
distance de l'origine: $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\,|c| = \frac{1}{\sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

(c) $D_1 : t \mapsto \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$; $D_2 : s \mapsto \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$



h = distance minimale réalisée par le vecteur unique orthogonal aux deux vecteurs directeurs $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ qui passe de D_1 en D_2

Alors $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & -1\end{vmatrix} = 0\times\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} - 5\vec{k}$



Il s'ensuit qu'il existe t, s et u tels que

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}0\\5\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{aligned} -1 + t &= 2s \quad (1)\\ 2t + 5u &= 1 - s \quad (2)\\ -1 + 2t - 5u &= -1 - s \quad (3)\end{aligned}\right\}$$ on résout ces équations

$(1) \Rightarrow t = 1 + 2s \overset{(2)}{\Longrightarrow} 5u = 1 - 5s \overset{(3)}{\Longrightarrow} s = \frac{1}{10}$ puis $t = \frac{6}{5}$ et $u = \frac{1}{10}$

On calcule alors la distance entre $\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} + \underbrace{\frac{6}{5}}_{t = \frac{6}{5}}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + \underbrace{\frac{1}{10}}_{s = \frac{1}{10}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$

c'est à dire entre $\begin{pmatrix}1/5\\12/5\\7/5\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1/5\\9/10\\-11/10\end{pmatrix}$

distance $= \sqrt{\left(\frac{12}{5} - \frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{7}{5} + \frac{11}{10}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{34}$

VI 1. Fausse : la parabole n'a pas de centre

2. Ça dépend de la définition ! en termes de directrice, foyer et excentricité $e > 0$, le cercle n'est pas une conique (or en effet $e = 0$ pour le cercle)

En terms de solution d'une equation du type $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$, le cercle est bien une conique

3. Fausse : une parabole n'a qu'un seul foyer et une seule directrice

5. Vraie.

6. Vraie

VII $AB = 2$

(a) définition d'une ellipse : $\{M : AM + BM = 2a\}$ avec $2a > AB = 2$
dans ce cas $2a = 4 > 2$.

(b) $\{M \mid AB + BM = 1\}$ aucune solution : par l'inégalité triangulaire dans le plan $AB + BM > AB = 2$.

(c) 

$AM + BM = AB = 2$

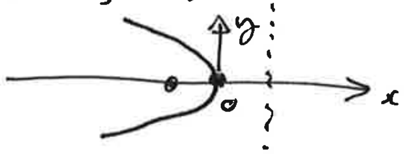
Solution : segment droit joignant A à B.

(d) Il s'agit de la définition d'hyperbole.

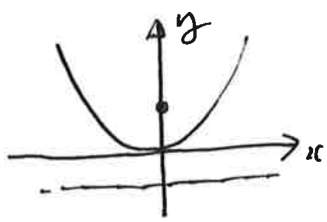
VIII $y^2 = 2ax$: foyer $(+\frac{a}{2}, 0)$, directrice : $x = -\frac{a}{2}$

1. $y^2 = x$: foyer $(\frac{1}{4}, 0)$, directrice $x = -\frac{1}{4}$, pas de centre,
axe focal = axe des x.

2. $y^2 = -x$ foyer $(-\frac{1}{4}, 0)$, directrice $x = \frac{1}{4}$, pas de centre, axe focal = axe des x

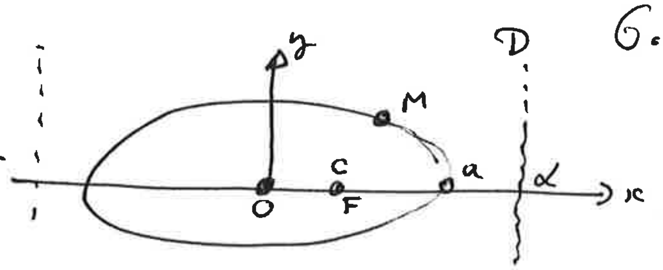


3. $y = x^2$



les rôles de x et y sont inversés :
foyer : $(0, \frac{1}{4})$;
directrice $y = -\frac{1}{4}$
pas de centre
axe focal = axe des y.

VIII 4. ellipse.



Cadre général: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a > b$

$a^2 = c^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

Définition. $d(M,F) = e\, d(M,D)$

On pose $M = \binom{a}{0}$: $(a - c) = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\,(\alpha - a)$

$\Rightarrow \left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right) = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2}\,(\alpha - a)$

$\Rightarrow \alpha - a = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}\left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right) = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} - a$

$\Rightarrow \alpha = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{a^2}{c}$

équation des directrices: $x = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$: $a = 5$, $b = 3$.

$c = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4.$

$\alpha = \frac{25}{4}$

Foyers: $(4, 0)$ et $(-4, 0)$

directrices: $x = \frac{25}{4}$ et $x = -\frac{25}{4}.$

Centre : O

axe focal: axe des x

5: $x^2 + 2y^2 = 1$: $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{(1/\sqrt{2})^2} = 1$, $a = 1$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$c = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

foyers: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ et $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

directrices: $x = \frac{a^2}{c} = \sqrt{2}$ et $x = -\sqrt{2}$

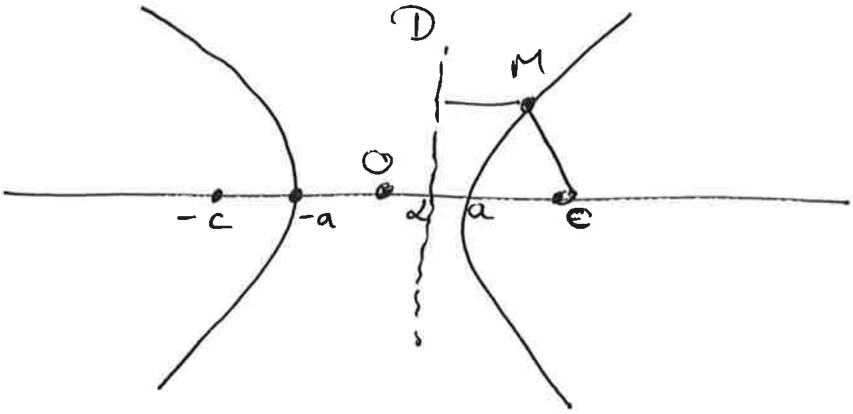
Centre O

axe focal: axe des x :

VIII 6. hyperbole : cadre general : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$c^2 = a^2 + b^2$

$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$



Soit $x = \alpha$ une directrice :

$d(M,F) = e\, d(M,D)$

On pose $M = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$(c-a) = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}\,(a-\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad c-a = \frac{1}{a}\sqrt{a^2+b^2}\,(a-\alpha) \Rightarrow \left(\sqrt{a^2+b^2} - a\right)\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = a-\alpha$$

$$\Rightarrow a - \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = a - \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a^2}{c}$$

$x^2 - y^2 = 1$: $a = 1$, $b = 1$, $c = \sqrt{2}$ $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

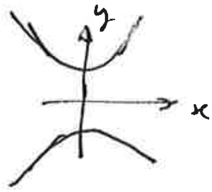
Foyers : $(\sqrt{2}, 0)$ et $(-\sqrt{2}, 0)$

directrices : $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

centre : O

axe focal : axe des x.

7. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ les rôles de x et y sont inversés :



$a = 3$, $b = 4$ $c = \sqrt{9+16} = 5$, $\alpha = \frac{9}{5}$

Foyers : $(0, 5)$ et $(0, -5)$

directrices : $y = \frac{9}{5}$ et $y = -\frac{9}{5}$

Centre : O

axe focal : axe des y.

VIII 8. $y = x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}.$

$y - \frac{3}{4} = (x+\frac{1}{2})^2$

Soit $X = x + \frac{1}{2}$ et $Y = y - \frac{3}{4}$ (des nouvelles coordonnées).

L'équation devient $Y = X^2$ (voir 3.)

avec foyer: $(X, Y) = (0, \frac{1}{4})$ ~~et~~

Directrice $Y = -\frac{1}{4}$

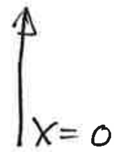
axe focal : axe des Y

On revient aux coordonnées (x, y) :

foyer $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ ~~et~~ $(X = 0 \Leftrightarrow x = -1/2)$

Directrice $y - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} \Longrightarrow y = \frac{1}{2}$

axe focal axe des Y correspond à $X = 0$



c'est à dire $x = -\frac{1}{2}$

9. $y^2+y-2x=0 \Leftrightarrow (y+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 2x = 0$

$\Leftrightarrow (y+\frac{1}{2})^2 = 2(x+\frac{1}{8})$

Soit $Y = y + \frac{1}{2}$, soit $X = x + \frac{1}{8}$

L'équation devient $Y^2 = 2X$ (voir 1.)

plus on fait comme ~~de~~ le dernier exercice.

10. $y^2 = 2x+3 = 2(x+\frac{3}{2})$

soit $Y = y$ et $X = x + \frac{3}{2}$ etc

11. $x^2+x+2y^2+y=0 \Leftrightarrow (x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 2(y+\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{8} = 0$

$\Leftrightarrow (x+\frac{1}{2})^2 + 2(y+\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

Soit $X = x + \frac{1}{2}$, $Y = y + \frac{1}{4}$: $\frac{8}{3}X^2 + \frac{16}{3}Y^2 = 1$

$\Leftrightarrow \frac{X^2}{(\sqrt{\frac{3}{8}})^2} + \frac{Y^2}{(\frac{\sqrt{3}}{4})^2} = 1$ ellipse etc

14. $y = \frac{1}{x} \iff xy = 1$

On fait une substitution comme dans les derniers exercices, sauf dans ce cas c'est plus subtile.

On remarque que si on écrit

$$(*) \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y) \end{cases}$$

(La transformation correspond à une rotation dans le plan — voir chapitre sur les matrices)

alors l'équation devient $\frac{1}{2}(X+Y)(X-Y) = 1$

c'est à dire $\frac{X^2}{2} - \frac{Y^2}{2} = 1$

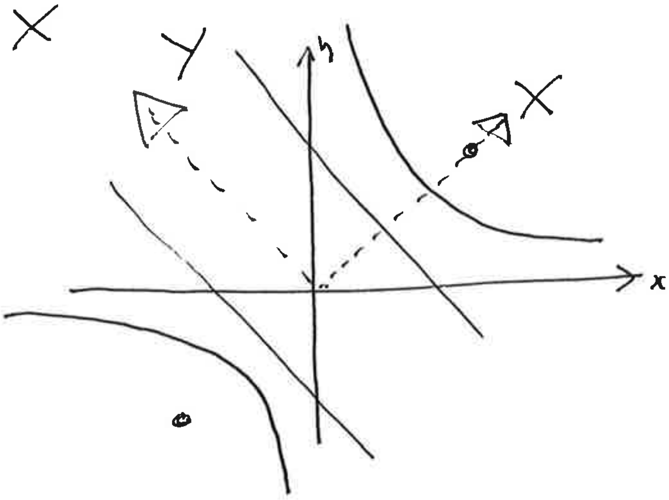
Il s'agit d'une hyperbole dans le XY-plan avec $a = b = \sqrt{2}$
d'où $c = \sqrt{a^2+b^2} = 2$

Foyers: $X = \pm 2$ et $Y = 0$

Directrice $d = \frac{a^2}{c} = \frac{2}{2} = 1$: $X = 1$ et $X = -1$

Centre $X = Y = 0$

axe focal: axe des X



Puis à l'aide d'$(*)$ on revient à x et y.

En effet $x+y = \frac{2X}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}X$

et $x-y = \frac{2Y}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}Y$

$$\implies (**) \begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \\ Y = \frac{1}{2}(x-y) \end{cases}$$

Foyers: $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(2+0) = \sqrt{2}$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(2-0) = \sqrt{2}$

et $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(-2)$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-2)$

c'est à dire $\boxed{(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \text{ et } (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})}$

Directrice: $X = 1$ si et seulement si $\boxed{x+y = \sqrt{2}}$

$X = -1$ - - - - - $\boxed{x+y = -\sqrt{2}}$

Centre ~~$x=0, y=0 \implies$~~ $\cancel{X=Y=0}$ $X = 0 = Y \iff \boxed{x = y = 0}$

axe focal: $Y = 0$ (axe des X) $\iff \boxed{x - y = 0}$