Variable complexe – Paul Baird

§4. Le théorème de Cauchy

Ce théorème affirme que l'intégrale d'une fonction holomorphe dans un ouvert U ne varie pas si le chemin d'intégration se déforme continuement dans U de telle sorte que ses extrémités restent fixes ou que le chemin reste fermé. On peut supposer que pour chaque chemin, le para`tre $t$ varie sur le même intervalle $I = [0,1]$, car on peut toujours satisfaire cette condition par un changement admissible de param`tre.

Chemins homotopes : On dit que deux chemins $\gamma_0 : I \to D$ et $\gamma_1 : I \to D$ à valeurs dans un domaine $D \subset \mathbf{C}$ d'extrémités communes : $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = a$ et $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = b$ sont homotopes (par rapport à D) s'il existe une application continue $\gamma(s,t) : I \times I \to D$ telle que

$$\begin{array}{lll} \gamma(0,t) = \gamma_0(t), & \gamma(1,t) = \gamma_1(t), & t \in I \\ \gamma(s,0) = a, & \gamma(s,1) = b, & s \in I \end{array}$$

Pour chaque $s = s_0 \in I$, la fonction $\gamma(s_0,t) = \gamma_{s_0}(t) : I \to D$ définit un chemin dans D.

De façon analogue, on dit que deux chemins fermés $\gamma_0 : I \to D$ et $\gamma_1 : I \to D$ sont homotopes dans D s'il existe une application continue $\gamma(s,t) : I \times I \to D$ telle que

$$\begin{array}{lll} \gamma(0,t) = \gamma_0(t), & \gamma(1,t) = \gamma_1(t), & t \in I \\ \gamma(s,0) = \gamma(s,1), & & s \in I \end{array}$$

Si γ_0 est homotope à γ_1 on ´crit $\gamma_0 \sim \gamma_1$. Il s'agit d'une relation d'équivalence sur l'ensemble des chemins à valeurs dans D. Les classes d'équivalence qui en résultent s'appellent classes d'homotopie.

On dit qu'un chemin fermé γ est homotope à zéro dans un domaine D s'il existe une application continue $\gamma(s,t) : I \times I \to D$ vérifiant les conditions ci-dessus avec $\gamma_1(t) =$ constante.

Par définition un domaine D est simplement connexe si tout chemin fermé dans D est homotope à zéro.

Primitive : Donné un ouvert D, une fonction $f : D \to \mathbf{C}$ et un chemin (continue) $\gamma : I \to D$, on dit qu'une fonction $F : I \to \mathbf{C}$ est une primitive de f le long de γ si (i) elle est continue sur I et (ii) pour tout $t_0 \in I$ il existe un voisinage U du point $z_0 = \gamma(t_0)$ dans lequel f possède une primitive F_U dans le sens que F_U est $\mathbf{C}$–différentiable sur U et $F'_U(z) = f(z)$ dans U ; en plus il faut que $F_U \circ \gamma(t) = F(t)$.

Remarques : 1. Soient F_1 et F_2 deux primitives de f dans un ouvert U. Soit $\Phi = F_1 - F_2$. Alors Φ est holomorphe ($\partial\Phi/\partial\overline{z} = 0$) et $\partial\Phi/\partial z = F_1' - F_2' = 0$, donc $\partial\Phi/\partial x = \partial\Phi/\partial y = 0$ et Φ est constante. C'est à dire deux primitives diffèrent par une constante.

2. Si f oissède une primitive F partout dans l'ouvert D, la fonction $F \circ \gamma(t)$ peut servir de primitive le long de γ.

3. Soit $D = D(0,1) \setminus \{0\}$ et $f(z) = 1/z$. Alors la primitive $F_U(z) = \ln(z)$ n'est pas bien définie partout dans D.

Théorème 4.1 : Pour toute fonction f holomorphe dans un ouvert U et tout chemin $\gamma : I \to U$ continu, la primitive de f le long de γ existe et est définie à une constante additive près.

Lemme 4.2 (Cauchy) : Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert U. Alors l'intégrale de f le long du contour orienté de tout triangle $\Delta \subset U$ est nulle :

$$\int_{\partial\Delta} f \mathrm{d}z = 0$$

Preuve : Supposons que le lemme soit faux et qu'il existe un triangle $\Delta \subset U$ tel que

$$\left| \int_{\partial\Delta} f \mathrm{d}z \right| = M > 0\,.$$

ON décompose Δ en quatre triangles à l'aide des segments mdianes. Il est ´vident que l'intégrale de f le long de $\partial\Delta$ est égale à la some des intégrales le long des contours des petits triangles, car les intégrales le long des segments mdianes sont prises dans les deux sens. Il existe donc au moins un petit triangle Δ_1 tel que

$$\left| \int_{\partial\Delta_1} f \mathrm{d}z \right| \geq \frac{M}{4}\,.$$

En décomposant Δ_1 en quatre triangles de la même façon, on trouve au moins un triangle Δ_2 tel que

$$\left| \int_{\partial\Delta_2} f \mathrm{d}z \right| \geq \frac{M}{4^2}$$

On continue ainsi pour trouver le n-ième triangle Δ_n tel que

(1) $$\left| \int_{\partial\Delta_n} f \mathrm{d}z \right| \geq \frac{M}{4^n}$$

Puisque f est holomorpheen z_0, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que dans l´criture

(2) $$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + \alpha(z)(z - z_0)$$

on a $|\alpha(z)| < \varepsilon$ pour tout $z \in V := \{z \in U : |z - z_0| < \delta\}$. Alors V contient au moins un triangle Δ_n et d'après (**??**)

$$\int_{\partial \Delta_n} f \mathrm{d}z = \int_{\partial \Delta_n} f(z_0) \mathrm{d}z + \int_{\partial \Delta_n} f'(z_0)(z - z_0) \mathrm{d}z + \int_{\partial \Delta_n} \alpha(z)(z - z_0) \mathrm{d}z$$

Mais les deux premièrres intégrales de la partie droite sont nulles donc

$$\int_{\partial \Delta_n} f \mathrm{d}z = \int_{\partial \Delta_n} \alpha(z)(z - z_0) \mathrm{d}z$$

où $|\alpha(z) < \varepsilon$ pour tout $z \in \partial \Delta_n$. D'autre part, pour tout $z \in \partial \Delta_n$, $|z - z_0| < L(\partial \Delta_n)$, donc

$$\left| \int_{\partial \Delta_n} f \mathrm{d}z \right| = \left| \int_{\partial \Delta_n} \alpha(z)(z - z_0) \mathrm{d}z \right| < \varepsilon L(\partial \Delta_n)^2 = \varepsilon \frac{L(\partial \Delta)^2}{4^n}$$

D'après (**??**), $M < \varepsilon L(\partial \Delta)^2$, et puisque ε est arbitraire on en déduit que $M = 0$ contraire à l'hypothèse. $\square$

<u>Lemme 4.3</u> : Soit f holomorphe dans un ouvert $U \subset \mathbf{C}$ et soit $a \in U$. Pour tout disque $D = \{z : |z - a| < r\} \subset U$, la fonction f admet une primitive

$$F(z) = \int_{[a \to z]} f(w) \mathrm{d}w$$

dans D.

<u>Preuve</u> : On fixe un point $z \in D$. soit δ assez petit que $z + h \in D$ pour tout $|h| < \delta$. Le triangle avec sommets $a, z, z + h$ appartient à U et d'apiès Lemme 4.2,

$$\int_{[a \to z]} f \mathrm{d}w + \int_{[z \to z+h]} f \mathrm{d}w + \int_{[z+h \to a]} f \mathrm{d}w = 0$$

Le premier terme est égale à $F(z)$ et le 3ième à $-F(z + h)$, donc

$$F(z + h) - F(z) = \int_{[z \to z+h]} f(w) \mathrm{d}w$$

D'autre part

$$f(z) = \frac{1}{h} \int_{[z \to z+h]} f(z) \mathrm{d}w$$

d'où

$$\frac{F(z + h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int_{[z \to z+h]} (f(w) - f(z)) \mathrm{d}w$$

Puisque f est continue, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $|h| < \delta \Rightarrow |f(w) - f(z)| < \varepsilon$ pour tout $w \in [z \to z + h]$. On en dénduit que pour tout $|h| < \delta$

$$\left| \frac{F(z + h) - F(z)}{h} - f(z) \right| < \frac{1}{|h|} \varepsilon |h| = \varepsilon$$

et $F'(z) = f(z)$. $\square$

En démontrant le lemme 4.3, nous avons utilisé que deux propriétés de f : sa continuité et le fait que son intégrale lde long du contour orienté de tout triangle contenu dans u est nulle. On en déduit le théorème de Moréra :

Théorème 4.4 : Soit f une fonction continue dans un ouvert U pour laquelle son intégrale le long du contour de tout triangle contenu dans U est nulle, alors f est holomorphe.

Preuve : Puisque f admet une primitive dand tout disque contenu dans U, elle est holomorphe. □

Preuve du Théorème 4.1 : Soit $\gamma : [0,1] \to U$ continu. On subdivise l'intervalle $[0,1]$ en n segements $I_k = [t_k, t'_k]$ de telle sorte que deux segements voisins intersectent en un intervalle non-trivial : $t_k < t_{k+1} < t'_k,\ t_1 = 0, t'_n = 1$. La fonction γ etant uniformément continue, on peut choisir les I_k assez petits afin que leurs images par γ sont contenus dans un disque $D_k \subset U$ dans lequel f admet une primitive (lemme 4.3). Les primitivea définies dans D_1 diffèrent par une constante ; on choisit une parmi eux : F_1. Chaque primitive définie D_2 ne peut que différer de F_1 dans $D_1 \cap D_2$ par une constante, donc il existe une F_2 qui est confondue avec F_1 dans $D_1 \cap D_2$. On continue ainsi : dans chaque D_k on choisit une primitive F_k de telle sorte que $F_k \equiv F_{k+1}$ dans $D_k \cap D_{k+1}$. La fonction $\Phi(t) = F'_k circ\gamma(t),\ t \in I_k\ (k = 1, \ldots, n)$ est une primitive de f le long de γ.

En effet, elle est continue dans $[0,1]$ et pour tout $t_0 \in [0,1]$ il existe un voisinage de t_0 dans lequel $\Phi(t) = F_U \circ \gamma(t)$ où F_u est une primitive de f dans un voisinage de $\gamma(t_0)$.

soient Φ_1 et Φ_2 deux primitives de f le long de γ. Dans un voisinage U_{t_0} de t_0 dans $[0,1]$ on a $\Phi_1 = F \circ \gamma(t)$ et $\Phi_2 = G \circ \gamma(t)$ où F et G diffèrent par une constante additive. Il s'ensuit que $\varphi(t) = \Phi_1(t) - \Phi_2(t)$ est constante dans U_{t_0}. Or, une fonction localement constante dans un ensemble connexe est constante. □

Remarque : Avec le théorème 4.6 ci-dessous, on peut définir l'intégrale d'une fonction holomorphe le long d'un chemin continu en le déformant en un qui est de classe C^1.

Corollaire 4.5 (Formule de Newton–Leibnitz) : Soit $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbf{C}$ un chemin C^1 par morceaux et soit f une fonction continue sur l'image de γ admettant une primitive $\Phi(t)$ le long de γ, alors

$$\int_\gamma f \mathrm{d}z = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)\,.$$

Preuve : On divise $[\alpha, \beta]$ en un nombre fini de chemins $\gamma_k : [\alpha_k, \alpha_{k+1}] \to \mathbf{C}$ de telle sorte que chaqu'un est C^1 avec image contenu dans un domaine où f admet une primitive

Φ_k. Alors

$$\int_{\gamma_k} f \mathrm{d}z = \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} (f \circ \gamma_k(t))\, \gamma_k'(t)\mathrm{d}t = \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \Phi_k'(t)\mathrm{d}t = \Phi_k(\alpha_{k+1}) - \Phi_k(\alpha_k)$$

En ajoutant ces inégalités on en déduit le résultat. $\square$

<u>Théorème 4.6</u> : Soit $f : U \to \mathbf{C}$ holomorphe ($U \subset \mathbf{C}$ ouvert) et soient γ_0, γ_1 deux chemins (continus) homotopes dans U (soit qu'ils ont des extrémités communes soit qu'ils sont fermés), alors

$$\int_{\gamma_0} f \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f \mathrm{d}z$$

<u>Preuve</u> : Soit $\gamma : I \times I \to U$ la fonction définissant l'homotopie. On recouvre $K = I \times I$ par un système de petits carrés K_{mn} $(m, n = 1, \ldots, N)$ de telle sorte que chaque K_{mn} intersecte son voisin dans un ensemble d'intérieur non-vide. La fonction γ étant uniformément conitinue, on peut suppose les carrés K_{mn} choisis assez petits pour que l'image $\gamma(K_{mn})$ soit contenu dans un disque $D_{mn} \subset U$ dans lequel f admet une primitive F_{mn} (lemme 4.3). Fixons l'indice m et procédons comme dans la preuve du Théorème 4.1.

On choisit une primitive F_{m1} dans D_{m1} et une primitive F_{m2} dans D_{m2} telle que $F_{m1} = F_{m2}$ dans $D_{m1} \cap D_{m2}$. De la même façon on construit $F_{m3}, \ldots, F_{mN}$. On obtient la fonction

$$\Phi_m(s,t) = F_{mn} \circ \gamma(s,t) \quad \text{pour} \quad (s,t) \in K_{mn}\ (n = 1, \ldots, N)$$

Alors Φ_m est continue dans le rectangle $K_m = \cup_{n=1}^{N} K_{mn}$ et définie à une constante additive près. On choisit Φ_1 arbitrairement et Φ_2 de telle sorte que $\Phi_1 = \Phi_2$ dans l'intersection $K_1 \cap K_2$. On construit $\Phi_3, \ldots, \Phi_N$ de la même façon afin de construire la fonftion

$$\Phi(s,t) = \Phi_m(s,t) \quad \text{pour} \quad (s,t) \in K_m \quad (m = 1, \ldots, N)$$

Dans le cas où γ_1, γ_2 ont des extrémités communes, on a que pour tout $s \in I$m alors $\gamma(s,0) = a$ et $\gamma(s,1) = b$ (chemins constants). Puisque $\Phi(s,t) = \Phi_m(s,t) = F_{mn} \circ \gamma(s,t)$, et $F_{mn} \circ \gamma(s,0) = F_{mn}(a) =$ constante, on voit que $\Phi(s,t)$ esst localement constante en s, or une fonction localement constante sur un intervalle connexe est constatne. On en déduit que

$$\Phi(0,0) = \Phi(1,0) \quad \text{et} \quad \Phi(0,1) = \Phi(1,1)$$

et par suite

$$\int_{\gamma_0} f \mathrm{d}z = \Phi(0,1) - \Phi(0,0) = \Phi(1,1) - \Phi(1,0) = \int_{\gamma_1} f \mathrm{d}z$$

De la même manière, si les deux chemins sont fermés on en déduit que $\Phi(s,1)-\Phi(s,0)$ est localement constante en s donc constante et l'enoncé du théorème est aussi vraie. $\square$

Corollaire 4.7 : Soit $f : U \to \mathbf{C}$ holomorphe (U ouvert), alors son intégrale le long de tout chemin fermé homotope à zéro est nulle.

Corollaire 4.8 : Si une fonction f est holomorphe dans un ouvert simplement connexe U, alors son intégrale le long de tout chemin fermé $\gamma : I \to U$ est nulle.

Corollaire 4.9 : Toute fonction f holomorphe dans un ouvert U simplement connexe admet une primitive dans U.

Preuve : Soit $a \in U$ et soient γ_1, γ_2 deux chemins dans U joignant a à un point $z \in U$. Alors

$$0 = \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2^-} f \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f \mathrm{d}z - \int_{\gamma_2} f \mathrm{d}z\,.$$

Il s'ensuit que la fonction $F : U \to \mathbf{C}$ définie par $F(z) = \int_\gamma f \mathrm{d}z$ est bien définie indépendamment du choix du chemin γ. On démontre que F est une primitive pour f.

Soit $z_0 \in U$ est soit $r > 0$ choisi tel que $D(z_0, r) \subset U$. Soit γ un chemin joignant a à z_0. Pour $z \in D(z_0, r)$, soit $\gamma_z = \gamma \cup [z_0 \to z]$. Alors

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{z - z_0} \left(\int_{\gamma_z} f \mathrm{d}z - \int_\gamma f \mathrm{d}z \right) = \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0 \to z]} f \mathrm{d}z$$

Ensuite on raisonne comme dans la preuve du lemme 4.3 $\square$

Définition : On suppose que la frontière $\partial U := \overline{U} \setminus U$ d'un ouvert U avec $\overline{U}$ compact, est constituée d'un nombre fini de courbes continues fermées. On oriente ces courbes de telle sorte que le domaine U reste toujours à gauche dans le sens de parcours. Avec cette orientation, ∂U est appelée la *frontière orientée.*

Théorème 4.10 : Soit U un ouvert avec $\overline{U}$ compact tel que ∂U est constituée d'un nombre fini de courbes conitinues fermées. Soit $f : V \to \mathbf{C}$ holomorphe avec $\overline{U} \subset V$. Alors l'intégrale de f le long de ∂U est nulle :

$$\int_{\partial U} f \mathrm{d}z = 0\,.$$

Preuve : Relions les composantes de la frontière ∂U par un nombre fini de coupures $\gamma_k^\pm$. Il est évident que la courbe fermée Γ composée de ∂U et les chemins $\Lambda^+ = \cup_k \gamma_k^+$ et

$\Lambda^- = \cup_k \gamma_k^-$ est homotope à zéro dans un domaine $V \supset \overline{U}$ dans lequel f est holomorphe. Il s'ensuit que

$$0 = \int_\Gamma f \mathrm{d}z = \int_{\partial U} f \mathrm{d}z + \int_{\Lambda^+} f \mathrm{d}z + \int_{\Lambda^-} f \mathrm{d}z = \int_{\partial U} f \mathrm{d}z$$

□

Théorème 4.11 (Formule intégrale de Cauchy) : Soit f holomorphe dans $V \supset \overline{U}$ où U est un ouvert avec $\overline{U}$ compact limité par un nombre fini de courbes continues. Alors pour rour $z \in U$ la fonction f se represente sous la forme :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial U} \frac{f(w)}{w-z} \mathrm{d}w$$

où ∂U est la frontière orientée de U.

Preuve : Par le Théorème 3.5,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} \mathrm{d}w. \quad \gamma(t) = a + re^{\mathrm{i}t},\ 0 \le t \le 2\pi$$

pour tout z avec $|z-a| < r$. En effet

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} \mathrm{d}w, \quad \gamma(t) = z + re^{\mathrm{i}t}$$

(en prennant $a = z$). Supposons que r est assez petit tel que $D = D(z,r) \subset U$. Soit $\widetilde{U} = U \setminus \overline{D}$. Alors $g(w) = f(w)/(w-z)$ est holomorphe dans $\widetilde{U}$ et

$$\int_{\partial \widetilde{U}} \frac{f(w)}{z-w} \mathrm{d}w = 0$$

Mais

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial \widetilde{U}} \frac{f(w)}{w-z} \mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial U} \frac{f(w)}{w-z} \mathrm{d}w - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} \mathrm{d}w$$

et par suite

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial U} \frac{f(w)}{w-z} \mathrm{d}w\,.$$

□